AHA23014 稲垣 秀精

問7.2

集合Mを$\mathbb{R}^2 \cap M = \phi$であり、

S^1への同相ψをもつ集合とする.

$D \subset \mathbb{R}^2$を単位閉円板とするとき、

$\varphi : \mathbb{R}^2 \sqcup M \longrightarrow D$ を

$$
\begin{array}{ccl}
\rotatebox{90}{$\in$} & & \\
x & \longmapsto & \begin{cases} \psi(x) & (x \in M) \\ \dfrac{x}{\|x\|+1} & (x \in \mathbb{R}^2) \end{cases}
\end{array}
$$

で定める. このときφは全単射で.

$$\varphi|_M = \psi : M \xrightarrow{\sim} \varphi(M) = \partial D = S^1$$

$$\varphi|_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \varphi(\mathbb{R}^2) = D^\circ$$

をみたす.

このφが同相となる位相を$\mathbb{R}^2 \sqcup M$に入れる。

具体的には、$\mathbb{R}^2 \sqcup M$上の開集系$\mathcal{O}$を

$\mathcal{O} := \{ \varphi^{-1}(\overline{U}) \mid \overline{U} \underset{open}{\subset} D \}$で定める。

このときφは連続全単射となる。

さらにφは同相でもある。

($\because$ $\varphi^{-1} : D \longrightarrow \mathbb{R}^2 \sqcup M$が連続を示す。

$\forall \overline{V} \underset{open}{\subset} \mathbb{R}^2 \sqcup M$とすると、

$\exists \overline{U} \underset{open}{\subset} D$, $\overline{V} = \varphi^{-1}(\overline{U})$

φ : bij より

$$(\varphi^{-1})^{-1}(\overline{V}) = \varphi(\overline{V}) = \varphi(\varphi^{-1}(\overline{U}))$$
$$= \overline{U} \underset{open}{\subset} D$$
)

よって $\mathbb{R}^2 \sqcup M \approx D$

$\mathbb{R}^2 \approx D^\circ$

$M \approx S^1$

$$\begin{array}{ccc} [0,1]\times[0,2\pi] & \xrightarrow{f} & D \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

を考えて. f は連続全射.

よって $\mathrm{Im} f = D$

ここで $[0,1]\times[0,2\pi]$: 有界閉よりコンパクト

コンパクトの連続像はコンパクト

よって D はコンパクト.

ゆえに $\mathbb{R}^2 \sqcup M$: コンパクト.

$\overline{D^\circ} = D$ より $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^2 \sqcup M$ について

$\overline{\mathbb{R}^2} = \mathbb{R}^2 \sqcup M$ //