

位相数学1演習

AHA 23045

千葉 虎左

問 8.2 \mathbb{R}^2 の任意の 2 点 $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ において

$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ で与えられるマンハッタン距離 d_1 が、距離の 3 条件を満たすことを示せ

$$(1) d_1 \text{ の定義より } d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \geq 0 \quad // \\ (x, y \in \mathbb{R}^2)$$

$$d_1(x, y) = 0 \text{ かつ } |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = 0 \text{ より}$$

$$|x_1 - y_1| = 0 \text{ かつ } |x_2 - y_2| = 0 \text{ より } x_1 - y_1 = 0 \text{ かつ } x_2 - y_2 = 0$$

$$x_1 = y_1 \text{ かつ } x_2 = y_2 \text{ かつ } x = (x_1, x_2), y = (x_1, x_2) \text{ より } x = y$$

$$\text{よって } x = y \text{ かつ } d_1 \text{ の定義より } d_1(x, y) = |x_1 - x_1| + |x_2 - x_2| = 0 \\ \text{よって } d_1(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad //$$

$$(2) d_1 \text{ の定義より } d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \\ = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| = d_1(y, x) \quad // \\ (x, y \in \mathbb{R}^2)$$

(3) $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ とする

$$d_1(x, z) = |x_1 - z_1| + |x_2 - z_2| \\ = |(x_1 - y_1) + (y_1 - z_1)| + |(x_2 - y_2) + (y_2 - z_2)| \\ \leq |x_1 - y_1| + |y_1 - z_1| + |x_2 - y_2| + |y_2 - z_2| \quad (\because \text{三角不等式}) \\ = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |y_1 - z_1| + |y_2 - z_2| \\ = d_1(x, y) + d_1(y, z)$$

$$\text{よって } d_1(x, z) \leq d_1(x, y) + d_1(y, z) \quad (x, y, z \in \mathbb{R}^2) \quad //$$