問 8.3

〈問題〉
$\mathbb{R}^2$の場合、$d_2(x,x') \leq d_1(x,x') \leq \sqrt{2}d_2(x,x')$という不等式が成り立つ。
$\mathbb{R}^n$の場合に、これに対応する不等式を求めよ。

〈解答〉
$x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n, x'=(x_1',\cdots,x_n{}')\in\mathbb{R}^n$に対して、$d_2(x,x') \leq d_1(x,x') \leq \sqrt{n}d_2(x,x')$と予想する。
これを示すために、$d_2(x,x') \leq d_1(x,x')$, $d_1(x,x') \leq \sqrt{n}d_2(x,x')$をそれぞれ示す。

$[d_2(x,x') \leq d_1(x,x')]$
(左辺)²より、
$$
\begin{aligned}
\{d_2(x,x')\}^2 &= (x_1-x_1{}')^2+\cdots+(x_n-x_n{}')^2 \\
&= |x_1-x_1{}'|^2+\cdots+|x_n-x_n{}'|^2 \\
&\leq (|x_1-x_1{}'|+\cdots+|x_n-x_n{}'|)^2 \\
&= \{d_1(x,x')\}^2
\end{aligned}
$$
よって、$d_2(x,x') \geq 0, d_1(x,x') \geq 0$より、$d_2(x,x') \leq d_1(x,x')$は成り立つ。

$\left[d_1(x,x') \leq \sqrt{n}d_2(x,x')\right]$
(左辺)²より、$\{d_1(x,x')\}^2$
$$
\begin{aligned}
&= (|x_1-x_1{}'|+\cdots+|x_n-x_n{}'|)^2 \\
&= (1\cdot|x_1-x_1{}'|+\cdots+1\cdot|x_n-x_n{}'|)^2
\end{aligned}
$$
このとき、$a_i=1, b_i=|x_i-x_i{}'|$とすると、コーシー・シュワルツの不等式より、
$(\sum_{i=1}^n a_i b_i)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$であるから、
$$
\begin{aligned}
&\leq (1^2+\cdots+1^2)(|x_1-x_1{}'|^2+\cdots+|x_n-x_n{}'|^2) \\
&= n(|x_1-x_1{}'|^2+\cdots+|x_n-x_n{}'|^2) \\
&= n\{(x_1-x_1{}')^2+\cdots+(x_n-x_n{}')^2\} \\
&= n\{d_2(x,x')\}^2
\end{aligned}
$$
よって、$d_1(x,x') \geq 0, \sqrt{n}d_2(x,x') \geq 0$より、$d_1(x,x') \leq \sqrt{n}d_2(x,x')$は成り立つ。

したがって、$d_2(x,x') \leq d_1(x,x') \leq \sqrt{n}d_2(x,x')$は成り立つ。