位相数学１　演習　問 8.4

問題

平面 $\mathbb{R}^2$上で、任意の 2 点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ と $\boldsymbol{x'} = (x'_1, x'_2)$ に対し、

$$d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x'}) = \max\{|x_1 - x'_1|, |x_2 - x'_2|\}$$

が距離の 3 条件を満たすことを示せ。

参考

$$(1) d(x, x') \geq 0 (x, x' \in \mathbb{R}^2), \quad \text{また } d(x, x') = 0 \Leftrightarrow x = x'$$

$$(2) d(x, x') = d(x', x) (x, x' \in \mathbb{R}^2)$$

$$(3) d(x, x'') \leq d(x, x') + d(x', x'') (x, x', x'' \in \mathbb{R}^2)$$

(解答)

(1)

Proof. $d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x'}) = \max\{|x_1 - x'_1|, |x_2 - x'_2|\}$ で
$0 \leq |x_1 - x'_1|, 0 \leq |x_2 - x'_2|$ であるから、
$0 \leq \max\{|x_1 - x'_1|, |x_2 - x'_2|\} = d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x'})$　　　　$\therefore d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x'}) \geq 0$
また、$d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x'}) = 0$ のとき、$\max\{|x_1 - x'_1|, |x_2 - x'_2|\} = 0$ であるから、
$0 \leq |x_1 - x'_1| \leq \max\{|x_1 - x'_1|, |x_2 - x'_2|\} = 0$ より、$|x_1 - x'_1| = 0$　つまり、$x_1 = x'_1$,
同様にして、$x_2 = x'_2$　　　　$\therefore \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x'}$
逆に、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x'}$とすると、$x_1 = x'_1, x_2 = x'_2$、つまり $|x_1 - x'_1| = 0, |x_2 - x'_2| = 0$ であるから
$\max\{|x_1 - x'_1|, |x_2 - x'_2|\} = 0$,　　　　$\therefore d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x'}) = \max\{|x_1 - x'_1|, |x_2 - x'_2|\} = 0$

□

(2)

Proof. $|x_1 - x'_1| = |x'_1 - x_1|, |x_2 - x'_2| = |x'_2 - x_2|$ であるから
$d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x'}) = \max\{|x_1 - x'_1|, |x_2 - x'_2|\} = \max\{|x'_1 - x_1|, |x'_2 - x_2|\} = d_\infty(\boldsymbol{x'}, \boldsymbol{x})$
$\therefore d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x'}) = d_\infty(\boldsymbol{x'}, \boldsymbol{x})$

□

(3)

Proof. $d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x''}) = |x_1 - x''_1|$ のとき、

$$\begin{aligned}
d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x''}) &= |x_1 - x''_1| = |x_1 - x'_1 + x'_1 - x''_1| \\
&\leq |x_1 - x'_1| + |x'_1 - x''_1| \\
&\leq \max\{|x_1 - x'_1|, |x_2 - x'_2|\} + \max\{|x'_1 - x''_1|, |x'_2 - x''_2|\} \\
&= d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x'}) + d_\infty(\boldsymbol{x'}, \boldsymbol{x''})
\end{aligned}$$

$d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x''}) = |x_2 - x''_2|$ のときも同様。
$\therefore d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x''}) \leq d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x'}) + d_\infty(\boldsymbol{x'}, \boldsymbol{x''})$

□