

問8.6 任意の $c > 0$ に対して、 (\mathbb{R}^n, d_2) と (\mathbb{R}^n, cd_2) は等長であることを示せ。

AHA23016 奥田 心美

☺ [示す: $\forall c > 0, \exists f: (\mathbb{R}^n, d_2) \rightarrow (\mathbb{R}^n, cd_2)$: 全単射な等長写像]

$\forall c > 0$ をとる。

$$f: (\mathbb{R}^n, d_2) \rightarrow (\mathbb{R}^n, cd_2) \quad \text{とおく.}$$

$$x \mapsto \frac{x}{c}$$

[示す: f : 全単射な等長写像]

(全射) [示す: $\forall y \in \mathbb{R}^n, \exists x \in \mathbb{R}^n: y = f(x)$]

$\forall y \in \mathbb{R}^n$ をとる。

$$x = cy \text{ とおく} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$f(x) = \frac{x}{c} = \frac{cy}{c} = y$$

(単射) [示す: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n (f(x) = f(y)), x = y$]

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n (f(x) = f(y))$ をとる。

$$f(x) = f(y) \text{ より } \frac{x}{c} = \frac{y}{c} \quad \therefore x = y$$

(等長写像) [示す: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, cd_2(f(x), f(y)) = d_2(x, y)$]

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ をとる。

$$\begin{aligned} cd_2(f(x), f(y)) &= c \|f(x) - f(y)\|_2 \\ &= c \left\| \frac{x}{c} - \frac{y}{c} \right\|_2 \\ &= c \left| \frac{1}{c} \right| \|x - y\|_2 \\ &= \|x - y\|_2 \quad (\because c > 0) \\ &= d_2(x, y) \end{aligned}$$

よって f : 全単射な等長写像

以上より、任意の $c > 0$ に対して、 (\mathbb{R}^n, d_2) と (\mathbb{R}^n, cd_2) は等長であることを示した。