No.

Date

問 8.7

$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$ を示す。

$\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$ だから、各 $|x_i| \le \|x\|_\infty$ が成り立つ。

よって

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \le \sum_{i=1}^{n} \|x\|_\infty^p$$
$$= n\|x\|_\infty^p$$

これより

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\le \left(n\|x\|_\infty^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty \quad \cdots ①$$

また、

$\max_{1\le i\le n} |x_i| = |x_k|$ となる $k\ (1\le k\le n)$ が存在するから

$$\left(\max_{1\le i\le n} |x_i|\right)^p = |x_k|^p$$
$$\le |x_k|^p + \left(\sum_{i=1}^{k-1} |x_i|^p\right) + \left(\sum_{i=k+1}^{n} |x_i|^p\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p$$

両辺 $\frac{1}{p}$ 乗して

$$\max_{1\le i\le n} |x_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)^{\frac{1}{p}} \quad \therefore \|x\|_\infty \le \|x\|_p \quad \cdots ②$$

①, ② より

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_p \le n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$$

$p\to +\infty$ のとき $n^{\frac{1}{p}} \to 1$ だから

$$\|x\|_\infty \le \lim_{p\to+\infty} \|x\|_p \le 1\cdot \|x\|_\infty$$

よって、$\lim_{p\to+\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$ が成り立つ。