問 9.2

AHA23007　木下翔太

問題

ユークリッド距離 $d_2$ と離散距離の小さい方を選んだ $\mathbb{R}^n$ 上の距離 $d'(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = min\ \{d_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), 1\}$ は、
$\mathbb{R}^n$ に $d_2$ と同じ位相を定めることを示せ.

解答

$O \in \mathfrak{O}_{(\mathbb{R}^n, d_2)} \Leftrightarrow O \in \mathfrak{O}_{(\mathbb{R}^n, d')}$ を示す.
" $\Rightarrow$ " を示す.
$\forall O \in \mathfrak{O}_{(\mathbb{R}^n, d_2)}$ を取る.
$\forall \boldsymbol{a} \in O,\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ を取ると, $d_2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) < \epsilon\ \Rightarrow\ \boldsymbol{x} \in O$ となる $\epsilon > 0$ が取れる.
$\epsilon' := min\ \{\epsilon, 1\}$ とすると, $\epsilon' > 0$ である.
$d'(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) < \epsilon'$ のとき, $d'(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) < 1$ より, $d'(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = d_2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})$ が成り立つ.
よって, $d_2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) < \epsilon' \leq \epsilon$ より, $\boldsymbol{x} \in O$
従って, $d'(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) < \epsilon' \Rightarrow \boldsymbol{x} \in O$ が成り立つので, $O \in \mathfrak{O}_{(\mathbb{R}^n, d')}$
" $\Leftarrow$ " を示す.
$\forall \in \mathfrak{O}_{(\mathbb{R}^n, d')}$ を取る.
$\forall \boldsymbol{a} \in O,\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ を取ると, $d'(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) < \epsilon\ \Rightarrow\ \boldsymbol{x} \in O$ となる $\epsilon > 0$ が取れる.
$d_2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) < \epsilon$ のとき, $d'(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = min\ \{d_2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}), 1\} \leq d_2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})$ より,
$d'(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) < \epsilon$ が成り立つので, $\boldsymbol{x} \in O$ となる.
従って, $d_2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) < \epsilon \Rightarrow \boldsymbol{x} \in O$ が成り立つので, $O \in \mathfrak{O}_{(\mathbb{R}^n, d_2)}$
以上より, $d'$ は $\mathbb{R}^n$ に $d_2$ と同じ位相を定める $\square$