9.3.

$$d''(x,y) := \begin{cases} \max\{d_2(x,y), 1\} & (x \neq y) \\ 0 & (x = y) \end{cases}$$

1. 非負性.

・$x \neq y$ のとき　$\max\{d_2(x,y), 1\} \geq 1 > 0$. …①

・$x = y$ のとき　$d''(x,y) = 0$. ($\because$ 仮定). …②

　　よって. $d''(x,y) \geq 0$ //

また、同一性について.

$x = y \Rightarrow d''(x,y) = 0$ ($\because$ ②) //

$d''(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$ を示す.

$\because$ 対偶をとると.

$x \neq y \Rightarrow d''(x,y) \neq 0$ となり、これを示す.

① から. $x \neq y$ ならば. $d''(x,y) > 0$

すなわち. $d''(x,y) \neq 0$. //

したがって. $x = y \Leftrightarrow d''(x,y) = 0$ //

2. 対称性.

・$d_2(x,y) = d_2(y,x)$ ($\because$ ユークリッド距離の対称性). …③

・$x \neq y$ のとき.

$$d''(x,y) = \max\{d_2(x,y), 1\}$$

$$\underset{(\because ③)}{=} \max\{d_2(y,x), 1\} = d''(y,x). //$$

・$x = y$ のとき.

$$d''(x,y) = 0 = d''(y,x) //$$

3. 三角不等式

$$d_2(x, z) \leq d_2(x, y) + d_2(y, z). \quad (\because \text{ユークリッド距離の三角不等式}) \cdots ④.$$

・$d_2(x, z) \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} d''(x, z) = d_2(x, z) &\overset{(\because ④)}{\leq} d_2(x, y) + d_2(y, z). \\ &\leq \max\{d_2(x, y), 1\} + \max\{d_2(y, z), 1\}. \\ &= d''(x, y) + d''(y, z). \end{aligned}$$

・$d_2(x, z) < 1$ において.

・$x = z$ のとき.

$$d''(x, z) = 0 \leq d''(x, y) + d''(y, z) \quad (\because \text{非負性}). //$$

・$x \neq z$, $x = y$ のとき.

$$\begin{aligned} d''(x, z) = 1 &\leq \max\{d_2(y, z), 1\} \\ &= 0 + d''(y, z) = d''(x, y) + d''(y, z). // \end{aligned}$$

$x \neq z$, $y = z$ のとき、同様に三角不等式が成り立つ //.

・$x \neq z$, $x \neq y$, $y \neq z$ のとき

$$\begin{aligned} d''(x, z) = 1 < 2 &\leq \max\{d_2(x, y), 1\} + \max\{d_2(y, z), 1\}. \\ &= d''(x, y) + d''(y, z). // \end{aligned}$$

よって. $d''(x, z) \leq d''(x, y) + d''(y, z)$ ■