問 9.4 X 上の距離 d''を

$$\left\{ \begin{array}{lll} d''(x,y) & = max\{d_2(x,y), 1\}(x \neq y) & \\ d''(x,y) & = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad (x = y) & (x, y \in X) \end{array} \right. \tag{1}$$

により定める。このとき d''が X に離散位相を定めることを示せ。

X 上の任意の一点集合が d'' により開集合となることを示せばよい。
$\forall x \in X$ をとる。また$\epsilon := \frac{1}{2}$としてとる。
このとき $B(x;\epsilon) = \{y \in X | d''(x,y) < \frac{1}{2}\}$
ここで $(x \neq)\forall y \in X$ に対して
$d_2(x,y) < 1$ のとき、$d''(x,y) = 1 > \frac{1}{2}$なので $y \notin B(x;\epsilon)$
$d_2(x,y) \geq 1$ のとき、$d''(x,y) = d_2(x,y) \geq 1 > \frac{1}{2}$なので $y \notin B(x;\epsilon)$
すなわち $(x \neq)\forall y \in X$ に対して $y \notin B(x;\epsilon)$
一方で $d''(x,x) = 0$ なので $x \in B(x;\epsilon)$
したがって $B(x;\epsilon) = \{x\} \subset \{x\}$ なので $\{x\}$ は開集合
よって X 上の任意の一点集合は d'' によって開集合となる。
すなわち d''は X に離散位相を定める。