位相数学 1 演習 問 9.6.

AHA23005　板倉 洸基

$prop.$有界閉かつその相対位相が離散位相である$\mathbb{R}^n$の部分集合は有限集合。

$pf. \forall X \subset \mathbb{R}^n : \left(\text{有界閉集合} \land \text{相対位相が離散位相}\right)$をとり、$X$は無限集合だと仮定する。

Xは有界だから、$\exists a_{0,1}, \cdots, a_{0,n}, b_{0,1}, \cdots, b_{0,n} \in \mathbb{R}\ s.t. X \subset [a_{0,1}, b_{0,1}] \times \cdots \times [a_{0,n}, b_{0,n}] =: I_0$

ここで、各辺を中点で分割し、I_0を2^n個の閉区間に分割すると、

Xは無限集合だから$X \cap I_0$も無限集合なので、2^n個の閉区間のうち、

少なくとも 1 つとXの共通部分は無限集合となる。

このうちの 1 つを$I_1 = [a_{1,1}, b_{1,1}] \times \cdots \times [a_{1,n}, b_{1,n}]$とし、

同様にして各$k \in \mathbb{N}$ に対して、I_kを定めることで$\{I_k\}_{k=0}^{\infty}$を定義すると、

$1 \leq \forall i \leq n, a_{k,i} \in \left\{a_{k-1,i}, \dfrac{a_{k-1,i} + b_{k-1,i}}{2}\right\}, b_{k,i} \in \left\{b_{k-1,i}, \dfrac{a_{k-1,i} + b_{k-1,i}}{2}\right\}$より、

$a_{k-1,i} \leq a_{k,i} < b_{k,i} \leq b_{k-1,i}$だから、

$I_0 \supset I_1 \supset \cdots \supset I_{k-1} \supset I_k \supset \cdots$ となり、

$\forall k \in \mathbb{N}$ に対してI_kは閉区間だから、$I_k \neq \emptyset$

$\therefore \bigcap_{k=0}^{\infty} I_k \neq \emptyset \quad \therefore \exists c \in \mathbb{R}^n\ s.t. c \in \bigcap_{k=0}^{\infty} I_k$

ここで、$l_{k,i} \coloneqq b_{k,i} - a_{k,i}$とすると、

I_kの定義から、$l_{k+1,i} = \dfrac{l_{k,i}}{2}$ なので、$l_{k,i} = \dfrac{l_{0,i}}{2^k}$ であり、

$d_k \coloneqq \sqrt{l_{k,1}^2 + \cdots + l_{k,n}^2}$とすると、

$d_k = \sqrt{\dfrac{l_{0,1}^2}{2^{2k}} + \cdots + \dfrac{l_{0,n}^2}{2^{2k}}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^k \sqrt{l_{0,1}^2 + \cdots + l_{0,n}^2} = \dfrac{d_0}{2^k} (> 0)$となる。

また、$\forall k \in \mathbb{N}$ に対して、$\forall x \in I_k$をとり、

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$と書くと、各$i$に対して、$x_i \in [a_{k,i}, b_{k,i}]$より、$|x_i - c_i| \leq l_{k,i}$

$\therefore \|x - c\| = \sqrt{(x_1 - c_1)^2 + \cdots + (x_n - c_n)^2} \leq \sqrt{l_{k,1}^2 + \cdots + l_{k,n}^2} = d_k < 2d_k = d_{k-1}$

$\therefore x \in B(c; d_{k-1})$

$\therefore I_k \subset B(c; d_{k-1})$

ここで、Xの相対位相は離散位相だから、$\{c\}$はXの開集合なので、

$\exists \varepsilon_c > 0\ s.t. B(c; \varepsilon_c) \cap X \subset \{c\}$

$\therefore \forall x \in X \setminus \{c\}, x \notin B(c; \varepsilon_c)$

ここで、$\varepsilon_c > 0, d_0 > 0$ より$\dfrac{d_0}{\varepsilon_c} > 0$ であり、$\log_2 \dfrac{d_0}{\varepsilon_c}$以上で最小の自然数を$K$とすると、

$K \geq \log_2 \dfrac{d_0}{\varepsilon_c}$より、$2^K \geq \dfrac{d_0}{\varepsilon_c}$

$\therefore \dfrac{d_0}{2^K} \leq \varepsilon_c$

$\therefore d_K \leq \varepsilon_c$

$\therefore B(c;d_K) \subset B(c;\varepsilon_c)$かつ、$I_{K+1} \subset B(c;d_K)$より、$I_{K+1} \subset B(c;\varepsilon_c)$

ここで、$\{I_k\}_{k=0}^{\infty}$の定義から、$I_{K+1} \cap X$は無限集合だから、$\exists x \in (I_{K+1} \cap X) \setminus \{c\}$
$\therefore \exists x \in B(c;\varepsilon_c) \cap X\ s.t. c \neq x$となるが、
これは、ε_cの取り方に矛盾する。

以上より、Xは有限集合である。
よって、$\mathbb{R}^n$の有界閉集合で、相対位相が離散位相になるものは有限集合なので、
$\mathbb{R}^n$の部分空間としては、相対位相が離散位相である無限集合は実現できない。■