問 9.9

（解答）

$(O1)$ まず、 $\varnothing,\ X/\sim\ \subset X/\sim$ である。

$\Pi_X{}^{-1}(\varnothing)=\{x\in X|\ \Pi_X(x)\in\varnothing\}=\varnothing\in O_X$

$\Pi_X{}^{-1}(X/\sim)=\{x\in X|\ \Pi_X(x)\in X/\sim\}=X\in O_X$

よって $\varnothing, X/\sim\ \in O_{X/\sim}$

$(O2)$ $\widetilde{O_1},\ ...,\ \widetilde{O_n}\in O_{X/\sim}$ をとる。

このとき $\Pi_X{}^{-1}(\widetilde{O_i})\in O_X\ (i=1,\ ...,\ n)$ であるから

$\Pi_X{}^{-1}(\bigcap_{i=1}^n\widetilde{O_i})=\bigcap_{i=1}^n\Pi_X{}^{-1}(\widetilde{O_i})\ \in O_X$

よって $\bigcap_{i=1}^n\widetilde{O_i}\in O_{X/\sim}$

$(O3)$ $\{\widetilde{O_\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda}\subset O_{X/\sim}$ をとる。

${}^\forall\lambda\in\Lambda,\ \Pi_X{}^{-1}(\widetilde{O_\lambda})\in O_X$ なので

$\Pi_X{}^{-1}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\widetilde{O_\lambda})=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\Pi_X{}^{-1}(\widetilde{O_\lambda})\in O_X$

よって $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\widetilde{O_\lambda}\in O_{X/\sim}$

以上から $O_{X/\sim}$ は位相の３条件を満たす。□