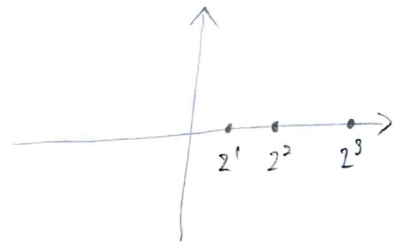
$X_1 = \{(2^k, 0) \mid k \in \mathbb{N}\}$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合か閉集合か

特別追加問題 2(1)



開集合の定義

$\forall a \in X_1, \exists \varepsilon > 0$ s.t. $B(a;\varepsilon) \cap \mathbb{R}^2 \subset X_1$

閉集合の定義

$\forall a \in X_1^c\ \exists \varepsilon > 0$ s.t. $B(a;\varepsilon) \cap \mathbb{R}^2 \subset X_1^c$

$\forall a = (x, 0) \in X_1$ をとる

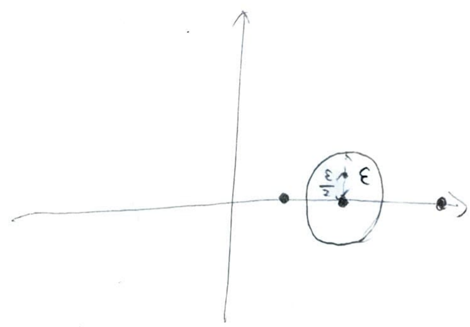
$\forall \varepsilon > 0$ をとると

$(x, \frac{\varepsilon}{2}) \in B(a;\varepsilon)$ だが

$(x, \frac{\varepsilon}{2}) \notin X_1$ なので

$B(a;\varepsilon) \cap \mathbb{R}^2 \not\subset X_1$

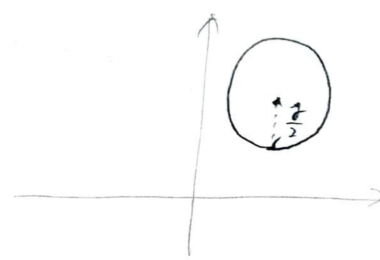
$\therefore X_1$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合ではない □



$\forall a = (x, y) \in X_1^c$ をとる

$y \neq 0$ のとき

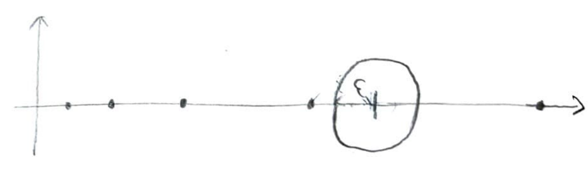
$\varepsilon := \left|\frac{y}{2}\right|$ とすると $\varepsilon > 0$.



$y = 0$ かつ $x > 2$ のとき

$2^k < x < 2^{k+1}$ となる $k \in \mathbb{N}$ が存在するので.

$\varepsilon := \frac{1}{2}\min\{x - 2^k, 2^{k+1} - x\}$ とすると. $\varepsilon > 0$



$y = 0$ かつ $x < 2$ のとき

$\varepsilon := \frac{1}{2}(2 - x)$ とすると $\varepsilon > 0$.

いずれの場合においても

$B(a;\varepsilon) \cap \mathbb{R}^2 \subset X_1^c$

$\therefore X_1^c$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合である

$\therefore$ 閉集合の定義より

X_1 は閉集合である □