2-(3)

(3) $X_3 = \{(\frac{1}{2^t}, 0) \mid t \in \mathbb{N}\} \cup \{(0,0)\}$ は $\mathbb{R}^2$ の閉集合である

点 $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus X_3$ をとる。

(i) $b \neq 0$ のとき　$\varepsilon := |b|$ とする。

$B((a,b);\varepsilon) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 < b^2\}$

$(x-a)^2 \geq 0$ であるから　$(y-b)^2 < b^2$ となる。

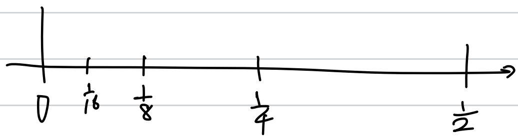
$y=0$ のとき　$(0-b)^2 < b^2$ となり　$(y-b)^2 < b^2$ が成り立たない。

よって、　$B((a,b);\varepsilon) \subset \mathbb{R}^2 \setminus X_3$

(ii) $b=0$ のとき　$a \neq 0$ であり、

(ア) $a<0$ のとき、　$\varepsilon := |a|$ とすると、

$B((a,b);\varepsilon) \subset \mathbb{R}^2 \setminus X_3$



(イ) $0 < a < \frac{1}{2}$ のとき

$\exists t \in \mathbb{N}$ s.t. $\frac{1}{2^{t+1}} < a < \frac{1}{2^t}$

$\varepsilon := \min\{a - \frac{1}{2^{t+1}}, \frac{1}{2^t} - a\}$ とすると、$B((a,b);\varepsilon) \subset \mathbb{R}^2 / X_3$

(ウ) $a > \frac{1}{2}$ のとき　$\varepsilon := a - \frac{1}{2}$ とすると

$B((a,b);\varepsilon) \subset \mathbb{R}^2 \setminus X_3$

よって、任意の点 $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus X_3$ に対して、$B((a,b);\varepsilon) \subset \mathbb{R}^2 \setminus X_3$ となる $\varepsilon > 0$ が

存在するので、$\mathbb{R}^2 \setminus X_3$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合である。

したがって　X_3 は $\mathbb{R}^2$ の閉集合である。

X_3 が開集合ではないことを示す. つまり、$\exists (a,b) \in X_3$ s.t. $\forall \varepsilon > 0$, $B((a,b);\varepsilon) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus X_3) \neq \emptyset$ を示す.

$(a,b) := (\frac{1}{2}, 0)$ とする. $\forall \varepsilon > 0$ をとる.

$B((a,b);\varepsilon) = B((\frac{1}{2},0);\varepsilon)$

ここで、$(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon, 0) \in B((\frac{1}{2},0);\varepsilon)$ であり、$(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon, 0) \in \mathbb{R}^2 \setminus X_3$

よって、$B((a,b);\varepsilon) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus X_3) \neq \emptyset$ が成り立つ.

したがって、X_3 は開集合ではない.