2.(6).

$X := \{(x, y) \mid x \geq 0\}$ において、

X が開集合または、閉集合かを調べる。

閉集合であることを示す。

∵ Xの補集合が開集合であることを示す。

$\mathbb{R}^2 \setminus X = \{(x, y) \mid x < 0\}$.

${}^\forall(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus X$ をとる。

また (a, b) を中心とする半径 $-\frac{a}{2} > 0$ となる

開円板をとる。

${}^\forall(x, y) \in B((a, b) ; -\frac{a}{2})$.

定義より、

$-\frac{a}{2} > \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} \geq |a - x|$.

$|a - x| < -\frac{a}{2}$.

$\frac{a}{2} < a - x < -\frac{a}{2}$

$-\frac{a}{2} < -x < -\frac{3}{2}a$.

$\frac{a}{2} > x > \frac{3}{2}a$.

$x < \frac{a}{2} < 0$ //

よって、$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus X$.

すなわち、$B((a, b) ; -\frac{a}{2}) \subset \mathbb{R}^2 \setminus X$.

$\mathbb{R}^2 \setminus X$ は開集合である。

したがって、X は閉集合 //

開集合でないことを示す。

$\because$

Xが開集合と仮定すると、

$^{\forall}(a', b') \in X$, $^{\exists}\varepsilon > 0$ s.t. $B((a', b'); \varepsilon) \subset X$、となる。

$(\Leftrightarrow\ ^{\forall}(x, y) \in B((a', b'); \varepsilon),\ (x, y) \in X)$.

$(a', b') = (0, 0)$ とおくと、

任意の $\varepsilon > 0$ において、

$(-\frac{\varepsilon}{2}, 0) \in B((a', b'); \varepsilon)$.

$-\varepsilon < 0$ となり、$x \geq 0$ に矛盾する。

よって、開集合でない $\blacksquare$