位相数学１＆同演習・講義資料

$\boxed{\text{第１回}}$

(2024年4月10日(水)講義分)

§1　この講義のあらまし

　X は $\mathbf{R}$ またはその部分集合とします。関数 $f : X \to \mathbf{R}$ が点 $a \in X$ で連続であるとは、x が a に限りなく近付くときの $f(x)$ の極限値が $x = a$ での値 $f(a)$ と一致する、すなわち $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ が成り立つことでしたが、数学要論Bでは、このことを ϵ-δ 論法と呼ばれるものを用いて、

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(a, \epsilon) > 0 \text{ s.t. } |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

と表しました。

m を自然数とし、X を $\mathbf{R}^m$ またはその部分集合とするとき、m 変数関数 $f : X \to \mathbf{R}$ の点 $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_m) \in X$ における連続性も、全く同様にして、$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a})$ により定義され、これを ϵ-δ 論法を用いて表すと、

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\boldsymbol{a}, \epsilon) > 0 \text{ s.t. } ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}|| < \delta \Longrightarrow |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})| < \epsilon$$

となりました。

ここで(太字への変更を除いて) 書き換えたのは

$$||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|| = \sqrt{(x_1-a_1)^2+\cdots+(x_m-a_m)^2}$$

の部分ですが、この２点 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{a}$ の位置ベクトルの差のノルム(絶対値)を用いて表しているものは、もちろん２点 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{a}$ の間の距離です。従って $X \subset \mathbf{R}^m$ の２点間の距離を $d_X(\cdot,\cdot)$ で表すことにすると、

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\boldsymbol{a}, \epsilon) > 0 \text{ s.t. } d_X(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) < \delta \Longrightarrow |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})| < \epsilon$$

と書いても同じことになります。

１変数の場合も、$m=1$ の場合に、実数直線 $\mathbf{R} = \mathbf{R}^1$ 上での距離を、差の絶対値 $|x-a|$ で測ったと思えば、上の特別な場合と自然に考えられます。

$\mathbf{R}^n$ の通常のノルム

$$||\boldsymbol{x}|| := \sqrt{{x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2} \quad (\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n)$$

は、次を満たします。

(1) $||\boldsymbol{x}|| \geq 0 \ (\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n)$, $||\boldsymbol{x}|| = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

(2) $||a\boldsymbol{x}|| = |a| \times ||\boldsymbol{x}|| \ (\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n; a \in \mathbf{R})$

(3) $||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}'|| \leq ||\boldsymbol{x}|| + ||\boldsymbol{x}'|| \ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathbf{R}^n)$

このノルムは、通常のユークリッド内積

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \rangle := x_1 x_1' + \cdots + x_n x_n' \quad (\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n), \boldsymbol{x}' = (x_1', \ldots, x_n') \in \mathbf{R}^n)$$

から

$$||\boldsymbol{x}|| := \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle^{1/2}$$

により自然に定義されるので、ユークリッド・ノルムと呼ばれます。

この意味で、通常のユークリッド内積を備えた $\mathbf{R}^n$ は、距離空間としても n 次元ユークリッド空間と呼ばれます。

さらに n を自然数とし、Y を $\mathbf{R}^n$ またはその部分集合とするとき、写像 $F=(f_1,\ldots,f_n):X\to Y$ の点 $\boldsymbol{a}=(a_1,\ldots,a_m)\in X$ における連続性も、全く同様にして、$\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}F(\boldsymbol{x})=F(\boldsymbol{a})$ により定義され、これを ϵ-δ 論法を用いて表すと、

$$\forall\epsilon>0,\exists\delta=\delta(\boldsymbol{a},\epsilon)>0 \text{ s.t. } ||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}||<\delta\Longrightarrow||F(\boldsymbol{x})-F(\boldsymbol{a})||<\epsilon$$

となります。

今回(太字への変更を除いて) 書き換えたのは

$$||F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{a})|| = \sqrt{(f_1(\boldsymbol{x}) - f_1(\boldsymbol{a}))^2 + \cdots + (f_n(\boldsymbol{x}) - f_n(\boldsymbol{a}))^2}$$

の部分ですが、これも今度は写像の終集合(写り先) の方の２点 $F(\boldsymbol{x})$ と $F(\boldsymbol{a})$ の位置ベクトルの差のノルム(絶対値)を用いて、それらの間の距離を表しているわけで、従って $Y \subset \mathbf{R}^n$ の２点間の距離も $d_Y(\cdot,\cdot)$ で表すことにすると、

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\boldsymbol{a}, \epsilon) > 0 \text{ s.t. } d_X(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) < \delta \Longrightarrow d_Y(F(\boldsymbol{x}), F(\boldsymbol{a})) < \epsilon$$

となります。

ここまで来ると、写像 F の定義域(始集合) X や終集合 Y (値域とは限りません) が、$\mathbf{R}^m$ や $\mathbf{R}^n$ (厳密にはそこにユークリッド・ノルムで距離を定めたユークリッド空間) またはそれらの部分集合でなくても、任意の２点間の「距離」が測れるような集合でさえあれば、全く同じように写像の連続性が定義されるはずです。

ただし、その後の議論で矛盾が起きたり、想定外の事態に陥るのは避けたいので、任意の集合 X に対し、通常「距離」という時、その言葉に期待する最低限の性質

(1) $d(x, x') \geq 0 \ (x, x' \in X)$

$\quad d(x, x') = 0 \iff x = x'$

(2) $d(x, x') = d(x', x) \ (x, x' \in X)$

(3) $d(x, x'') \leq d(x, x') + d(x', x'') \ (x, x', x'' \in X)$

(説明は後回しにして、今はさらっと流します)　を満たす関数

$$d : X \times X \to \mathbf{R}$$

を考え、X 上の距離(関数)と呼び、また、この距離 d が備わった集合 X のことを、距離空間と呼んで、(X, d) のように組にして表したりします。この距離空間が、この講義の主役です。

問1.1　$\mathbf{R}^n$ で考える通常の距離

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + \cdots + (x_n - x_n')^2}$$

が、上の(1)〜(3)を満たすことを確かめよ。

　実際、上記のように定義された一般の距離空間の間の写像についても、通常の $\mathbf{R}^m$ と $\mathbf{R}^n$ またはそれらの部分集合の間の写像と全く同様にして、上述のように連続性を定義することができます。

しかし昔の数学者はこれだけでは納得しませんでした。距離が定まっていなければ、写像の連続性は定義できないのかと言うことを、突き詰めて考えた挙句(かどうかは定かではありませんが) に、「位相」と言うものを考え出します。それが、この講義のタイトルなのですが、それは一体どう言うものなのか、説明するためには、今一度、ϵ-δ 論法に戻る必要があります。

　説明を簡略化するため、$X = \mathbf{R}^m$, $Y = \mathbf{R}^n$ の場合を考えます。今、写像 $F : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ が点 $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^m$ で連続であるとは、

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\boldsymbol{a}, \epsilon) > 0 \text{ s.t. } d_X(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) < \delta \Longrightarrow d_Y(F(\boldsymbol{x}), F(\boldsymbol{a})) < \epsilon$$

と表されましたが、今、条件 $d_X(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) < \delta$ は、点 $\boldsymbol{x}$ が、点 $\boldsymbol{a}$ からの距離 δ 未満の点全体の集合に含まれることを意味しています。この集合を点 $\boldsymbol{a}$ の δ 近傍と呼びますが、要は点 $\boldsymbol{a}$ 中心、半径 δ の円 $(n = 2)$ または球 $(n \geq 3)$ の内側のことです。この集合を $B(\boldsymbol{a}; \delta)$ で表すことにします。

　同じ表記によって、点 $F(\boldsymbol{a})$ の ϵ 近傍、すなわち条件 $d_Y(\boldsymbol{y}, F(\boldsymbol{a})) < \epsilon$ を満たす点全体の集合は、$B(F(\boldsymbol{a}); \epsilon)$ と表せますから、ϵ-δ 論法の

$$d_X(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) < \delta \Longrightarrow d_Y(F(\boldsymbol{x}), F(\boldsymbol{a})) < \epsilon$$

の部分は、

$$F(B(\boldsymbol{a}; \delta)) \subset B(F(\boldsymbol{a}); \epsilon)$$

つまり点 $\boldsymbol{a}$ の δ 近傍の F による像が点 $F(\boldsymbol{a})$ の ϵ 近傍に含まれると書き換えられます。

ただ、 ϵ-δ 論法では、議論は ϵ から始まり、δ はあくまで一般には ϵ に依存して変わるものなので、ϵ から説明を始められるように、さらにこれを言い換えれば、

$$F^{-1}(B(F(\boldsymbol{a});\epsilon)) \supset B(\boldsymbol{a};\delta)$$

つまり点 $F(\boldsymbol{a})$ の ϵ 近傍の F による逆像が点 $\boldsymbol{a}$ の δ 近傍を含むとなります。

ここで逆像 $F^{-1}(B(F(\boldsymbol{a});\epsilon))$ が点 $\boldsymbol{a}$ を含むのは定義より自明ですが、その δ 近傍 $B(\boldsymbol{a};\delta)$ も含むと言うのは、たとえ δ がどんなに小さくても、正である以上、点 $\boldsymbol{a}$ が逆像 $F^{-1}(B(F(\boldsymbol{a});\epsilon))$ の端 (正式には「境界」) にはなく、内側 (正式には「内部」) にいることを表しています。

一般に、点 $\boldsymbol{a}$ のある δ 近傍を含む(δ は正なら何でも構わないので、要は点 $\boldsymbol{a}$ を中心とする十分小さい円または球をすっぽり含むと言うことです) ような集合、つまり点 $\boldsymbol{a}$ がその内側にあるような集合を $\boldsymbol{a}$ の近傍と呼び、また $\boldsymbol{a}$ はそのような集合の内点であると言います。

すると、ϵ-δ 論法で表した連続性の定義は、$F(\boldsymbol{a})$ の任意の近傍 V の F による逆像 $F^{-1}(V)$ が、$\boldsymbol{a}$ のある近傍であるもしくは $F(\boldsymbol{a})$ を内点とする任意の集合 V の F による逆像 $F^{-1}(V)$ が、$\boldsymbol{a}$ を内点とすると言い表すことができます。

ここで、既に距離と言う言葉が使われていないことに注意しましょう。代わり近傍と言う言葉が用いられていて、大して変わっていない気がしないでもありませんが、ここで注目すべきは、ϵ も δ も正ならなんでもよい、つまり連続性を考えるにあたって、距離をきちんと測る必要性は必ずしもないと言う所にあります。実はやや漠然と近傍とか内点とか言うことがきちんと定められればよいわけです。

さて、ここまでは、各点 $\boldsymbol{a}$ における連続性について、考えて来ましたが、それでは定義域全体で(つまり定義域の各点で) 写像が連続であると言うことは、どのように表されるでしょうか？

ϵ-δ 論法に戻ると、

$$\forall \boldsymbol{a} \in X, \forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\boldsymbol{a}, \epsilon) > 0$$
$$\text{s.t. } d_X(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) < \delta \Longrightarrow d_Y(F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{a})) < \epsilon$$

と言うことになりますが、これを最後に用いた表現で言い換えると、その全ての点が内点であるような任意の集合 V に対し、F による逆像 $F^{-1}(V)$ もまた、その全ての点が内点であるような集合となると言うことになります。(この言い換えが同値であることは、完全に自明ではなく、厳密にはちょっとだけ論証が必要です。)

全ての点が内点であるような集合は、「境界」を含まない集合であり、開集合と呼ばれます。実数直線 $\mathbf{R}$ の部分集合で言えば、開区間、または開区間たちの和集合がこれに相当します。もちろん $\mathbf{R}$ 自身もまた開集合です。

$\mathbf{R}^n$ においては、境界を含まない円の内部と、それらの和集合たち、そして全体が開集合です。

問1.2　境界を含まない正方形の内部

$$\{(x_1, x_2) \mid 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$$

を、(無限個の)境界を含まない円の内部たちの和集合として表せ。

この言葉を用いると、F が連続写像であるとは、任意の開集合の逆像が開集合であることだと、極めて簡潔に述べることができます。

例えば、基本的な連続関数である一次関数 $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ において、任意の開区間 $I = (c, d)$ に対して、その逆像は

$$f^{-1}(I) = \left(\frac{c-b}{a}, \frac{d-b}{a} \right)$$

で開区間となります。

二次関数 $f(x) = x^2$ においても、開区間 $I = (c, d)$ の逆像は

$$f^{-1}(I) = \begin{cases} (-\sqrt{d}, -\sqrt{c}) \cup (\sqrt{c}, \sqrt{d}) & (0 \leq c < d) \\ (-\sqrt{d}, \sqrt{d}) & (c < 0 < d) \\ \emptyset & (c < d \leq 0) \end{cases}$$

で、いずれの場合も開集合です。

問 1.3　正弦関数 $f(x) = \sin x$ において、開区間 $I = (c, d)$ の f による逆像 $f^{-1}(I)$ がどのような集合になるか、c, d の値の範囲で場合分けして、答えよ。

問 1.4　正接関数 $f(x) = \tan x$ において、開区間 $I = (c, d)$ の f による逆像 $f^{-1}(I)$ がどのような集合になるか、c, d の値の範囲で場合分けして、答えよ。

これが二変数となると、二次関数 $f(x_1, x_2) = {x_1}^2 + {x_2}^2$ においても、開区間 $I = (c, d)$ の逆像は

$$f^{-1}(I) = \begin{cases} \{(x_1, x_2) \mid c < {x_1}^2 + {x_2}^2 < d\} & (0 \leq c < d) \\ \{(x_1, x_2) \mid {x_1}^2 + {x_2}^2 < d\} & (c < 0 < d) \\ \emptyset & (c < d \leq 0) \end{cases}$$

とやや複雑にはなりますが、いずれも「境界」を含まない開集合です。

一般に不等式が表す領域で、不等号に等号が付いていない場合に、境界を破線で図示することになったのは、扱う関数が主に連続関数であったためな訳です。

問 1.5 二変数関数 $f(x_1, x_2) = \max\{x_1, x_2\}$ において、開区間 $I = (c, d)$ の f による逆像 $f^{-1}(I)$ がどのような集合になるか答えよ。

連続でない関数の代表例であるガウスの括弧$f(x) = [x]$ (x を超えない最大の整数) を考えれば、例えば開区間 $(-0.1, 0.1)$ の逆像は値が 0 となる所と言う訳で$[0, 1)$ となり、これは左端を含むので開集合ではありません。

問1.6　$\mathbf{R}$ 全体で定義された、連続ではない関数 $f(x) = x - [x]$ について、次の問に答えよ。

(1)　$y = f(x)$ のグラフの概形を描け。

(2)　開区間 $I = (c, d)$ の f による逆像$f^{-1}(I)$ がどのような集合になるか、c, d の値の範囲で場合分けして、答えよ。

(3)　(2)で、$f^{-1}(I)$ が開集合とならないのは、どの場合か答えよ。

さて、そこで、今度は任意の集合 X に対して、２点間の距離ではなくて、「境界」を含まない集合に期待する最低限の性質を満たす集合達の集まり $\mathfrak{O}_X$ を考え、X の「開集合系」または「位相」と呼び、$(X, \mathfrak{O}_X)$ のように組にして表したものを、「位相空間」と呼びます。

距離空間ではない抽象的な位相空間については、詳しくは後期の位相数学2で扱いますが、距離空間にはその距離より定まる自然な位相があるので、前期でも位相空間の基本的な性質については、折に触れ、紹介して行きます。