位相数学1＆同演習・講義資料

$\boxed{\text{第２回}}$

(2024年4月17日(水)講義分)

§2 $\mathbf{R}^n$ の開集合、閉集合、境界

さて、実はこの講義で扱う内容は、いきなり一般の距離空間で話を進めても、大きな違いは無く話は進むのですが、やはり直感が湧きにくいかとも思いますので、とりあえずはまず実数直線 $\mathbf{R}$ 及び n 次元ユークリッド空間(通常の距離を備えた n 次元空間) $\mathbf{R}^n$ について考え、その後に、一般の距離空間へと考える範囲を拡げて行こうと思います。

前回、最初に言及しましたように、$\mathbf{R}$ 自身またはその部分集合である X 上で定義された関数 $f : X \to \mathbf{R}$ が点 $a \in X$ で連続であるとは、x が a に限りなく近付くときの $f(x)$ の極限値が $x = a$ での値 $f(a)$ と一致する、すなわち

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

が成り立つことで、これが ϵ-δ 論法からさらに推し進めて、内点や近傍、開集合と言った概念を用いて表せました。

前回も少しお話しましたが、開集合とは一言で言えば、境界を含まない集合のことです。しかし、複雑な集合では、そもそも境界とは何か、一目では分かりにくい場合も多いでしょう。そこでまず、「内部」「境界」「外部」を厳密に定義することから話を始めましょう。

一般に $\mathbf{R}^n$ において、任意の点 $\boldsymbol{a}$ と任意の実数 $\epsilon > 0$ に対し、$\boldsymbol{a}$ との距離が ϵ 未満であるような点全体の集合

$$B(\boldsymbol{a};\epsilon) := \{\boldsymbol{x} \mid ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}|| < \epsilon\}$$

を $\boldsymbol{a}$ の ϵ 近傍と呼びます。

これは、$n = 1$ のとき開区間 $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ (1 次元なので $\boldsymbol{a}$ は細字で a と表記)　のことであり、$n = 2$ のときは $\boldsymbol{a}$ を中心とし半径 ϵ の円の内側(開円板)、$n \geq 3$ のときは $\boldsymbol{a}$ を中心とし半径 ϵ の球の内側(開球体) のことです。

さらに $\mathbf{R}^n$ の部分集合 X において、点 $\boldsymbol{a} \in X$ に対し、少なくとも十分小さい $\epsilon > 0$ に対しては、ϵ 近傍 $B(\boldsymbol{a};\epsilon)$ もまた X の部分集合である、すなわち

$$\exists\epsilon > 0 \text{ s.t. } B(\boldsymbol{a};\epsilon) \subset X$$

が成り立つとき、$\boldsymbol{a}$ は X の内点であると言い、また X は $\boldsymbol{a}$ の近傍であると言います。そして X に属する全ての点が、X の内点であるとき、X は $\mathbf{R}^n$ の開集合であると言います。

任意の$\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a};\epsilon)$ に対し$||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|| < \epsilon$ ですから、$B(\boldsymbol{x};\epsilon-||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}||)$ の元、すなわち

$$||\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|| < \epsilon - ||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}||$$

を満たす任意の $\boldsymbol{x}' \in \mathbf{R}^n$ に対し、三角不等式より

$$||\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{a}|| \leq ||\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|| + ||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|| < \epsilon$$

が成り立ちます。従って

$$B(\boldsymbol{x};\epsilon-||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}||) \subset B(\boldsymbol{a};\epsilon)$$

より (任意の) $\boldsymbol{x}$ が$B(\boldsymbol{a};\epsilon)$ の内点になるため、$B(\boldsymbol{a};\epsilon)$ 自身、開集合 です。

さらに、開集合 O (位相空間論においては、初めから開集合とわかっているときは O で表すのが慣例)　の各点 $\boldsymbol{a}$ に対し、$B(\boldsymbol{a};\epsilon)\subset O$ を満たす $\epsilon>0$ を一つ選び $\epsilon_{\boldsymbol{a}}$ と表すことにすると、

$$O=\bigcup_{\boldsymbol{a}\in O} B(\boldsymbol{a};\epsilon_{\boldsymbol{a}})$$

が成り立ちますから、$\mathbf{R}^n$ $(n\geq 2)$ の任意の開集合は、開円板または開球体たちの和集合として表せます。逆に、任意の開円板または開球体の族の和集合は開集合になります。

(境界の含まない正方形の内部が、無限個の開円板たちの和集合として表せることは、問 1.2 で既に見たとおりです。)

$n=1$ の場合、すなわち実数直線 $\mathbf{R}$ においては、点 a の ϵ 近傍は開区間

$$B(a;\epsilon)=(a-\epsilon,a+\epsilon)$$

ですから、$\mathbf{R}$ の開集合とは、開区間たちの和集合と言うことになります。

特に任意の有界開区間 (a,b), 任意の無限開区間 $(-\infty,b)$, $(a,+\infty)$, $\mathbf{R}$ 全体は開集合です。

$\emptyset$ も、自動的に条件を満たす (「$\forall a\in\emptyset$ が内点」の a を、そもそも一つもとらなくてよい) と言う意味で、開集合と考えます。

問2.1　次の集合 X は $\mathbf{R}$ の開集合か否か、定義に戻って示せ。

(a) $X = \left\{ x \;\middle|\; \forall n \in \mathbf{N}, x \neq \dfrac{1}{2^n} \right\}$

(b) $X = \left\{ x \;\middle|\; x \neq 0 \text{ かつ } \forall n \in \mathbf{N}, x \neq \dfrac{1}{2^n} \right\}$

問2.2　次の集合 X は $\mathbf{R}^2$ の開集合か否か、定義に戻って示せ。

(a) $X = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \notin \mathbf{Z} \text{ かつ } x_2 \notin \mathbf{Z}\}$

(b) $X = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \notin \mathbf{Z} \text{ または } x_2 \notin \mathbf{Z}\}$

(c) $X = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \notin \mathbf{Z} \text{ と } x_2 \notin \mathbf{Z} \text{ の一方のみ成り立つ}\}$

(d) $X = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \notin \mathbf{Q} \text{ または } x_2 \neq 0\}$

(問2.1,2.2については、各小問毎に別の問題とみなすこと)

　開集合とは限らない $X \subset \mathbf{R}^n$ に対し、X の内点全体の集合を X の内部または開核と呼び、X^i で表します。X^i はもちろん開集合で、特に

$$(X^i)^i = X^i$$

が成り立ちます。

　X^i は X に含まれる最大の開集合です。

問 2.3　このことを示せ。

(任意の開集合 $O \subset X$ に対し、$O \subset X^i$ が成り立つことを示せ。)

　従って、X が開集合であるための必要十分条件は $X^i = X$ です。

問 2.4　$X \subset Y$ のとき、$X^i \subset Y^i$ が成り立つことを示せ。

第２回補足

　ここまで、内点、開集合、内部などを定義して来ましたが、それらが満たす性質について、最後にさらっと流した所を、少し補足しておきます。

(1)　まず「 X^i はもちろん開集合」と言う主張について。ここで「もちろん」と書きましたが、実はちょっとだけ議論が必要な所です。

　この主張が意味するのは、

$$X^i \text{ の任意の点は } X^i \text{ の内点である}$$

と言うことであって、この命題は、X^i の定義から直ちに従う

$$X^i \text{ の任意の点は } X \text{ の内点である}$$

と言う命題とは異なることに注意して下さい。

　すなわち、ここで示すべきことは、

$$X \text{ の任意の内点は } X^i \text{ の内点でもある}$$

と言うことです。

(2)　一方、これに続く「 $(X^i)^i = X^i$ 」と言う主張ですが、これは、数学要論Aで学んだ集合論の基本で、「 $(X^i)^i \subset X^i$ かつ $(X^i)^i \supset X^i$ 」と同値です。

　ところが、ここで内点の定義より、一般に任意の集合 Y (今の処は $\subset \mathbf{R}^n$) において、「 Y の任意の内点は Y 自身の点(元) 」(定義に戻って確かめましょう) ですから、特に $Y = X^i$ ととれば、「 X^i の任意の内点は X^i 自身の点」すなわち「 $(X^i)^i \subset X^i$ 」の方は直ちに従います。

　従って、後は「 $(X^i)^i \supset X^i$ 」を示せばよい訳ですが、これは言い換えれば

$$X \text{ の任意の内点は } X^i \text{ の内点でもある}$$

となり、実は(1)と示すべきことは共通です。

(3)　さて、これを定義に戻って書くと次のようになります。

$$\exists\epsilon > 0 \text{ s.t } B(\boldsymbol{a};\epsilon) \subset X \implies \exists\epsilon' > 0 \text{ s.t } B(\boldsymbol{a};\epsilon') \subset X^i$$

従って、もしここで、

$$B(\boldsymbol{a};\epsilon) \subset X \implies B(\boldsymbol{a};\epsilon) \subset X^i$$

が成り立つことが示せれば、ϵ' としてϵ 自身をとればよいことになります。

問 2.5　上記赤字の２箇所に留意し、定義に戻って $(X^i)^i = X^i$ を示せ。