位相数学1＆同演習・講義資料

$\boxed{\text{第３回}}$

(2024年4月24日(水)講義分)

§2　$\mathbf{R}^n$ の開集合、閉集合、境界(続き)

点 $\boldsymbol{a} \notin X$ に対し、少なくとも十分小さい $\epsilon > 0$ に対しては、ϵ 近傍 $B(\boldsymbol{a};\epsilon)$ もまた X と交わらない、すなわち

$$\exists\epsilon > 0 \text{ s.t. } B(\boldsymbol{a};\epsilon) \cap X = \emptyset$$

言い換えれば

$$\exists\epsilon > 0 \text{ s.t. } B(\boldsymbol{a};\epsilon) \subset X^c (:= \mathbf{R}^n \setminus X)$$

が成り立つとき、$\boldsymbol{a}$ は X の外点であると言い、X の外点全体の集合を X の外部と呼んで、X^e で表します。

定義(の言い換え) より

$$X^e = (X^c)^i$$

なので、X^e も開集合となり、特に

$$(X^e)^i = X^e$$

が成り立ちます。

問2.6　$X \subset Y$ のとき、$X^e \supset Y^e$ が成り立つことを示せ。

また、内点でも外点でもない点、言い換えれば、任意の $\epsilon > 0$ に対して(どんなに小さい $\epsilon > 0$ に対しても)、ϵ 近傍 $B(\boldsymbol{a};\epsilon)$ が X とも X^c とも交わる、すなわち

$$\forall\epsilon > 0, B(\boldsymbol{a};\epsilon) \cap X \neq \emptyset \text{ かつ } B(\boldsymbol{a};\epsilon) \cap X^c \neq \emptyset$$

が成り立つような点 $\boldsymbol{a}$ を、X の境界点であると言い、X の境界点全体の集合を X の境界と呼んで、∂X で表します。

$\mathbf{R}^n$ は(X によらず) X^i, ∂X, X^e の直和

$$\mathbf{R}^n = X^i \sqcup \partial X \sqcup X^e$$

となります。

X がその境界点を全て含むとき、X は $\mathbf{R}^n$ の閉集合であると言います。X が閉集合であることは X^c が閉集合であることと同値なので、これを定義とすることもあります。

X^i, $X^e = (X^c)^i$ が共に開集合なので、∂X は、X によらず閉集合となります。

$X \cup \partial X$ を X の閉包と呼び、$\overline{X}$ で表します。

$$\overline{X} = X^i \cup \partial X = (X^e)^c = ((X^c)^i)^c, \quad \overline{X}^c = X^e$$

が成り立ちます。従って $\overline{X}$ は閉集合で、特に

$$\overline{\overline{X}} = \overline{X}$$

が成り立ちます。

($\because$ $\overline{\overline{X}} = (((((X^c)^i)^c)^c)^i)^c = (((X^c)^i)^i)^c = ((X^c)^i)^c = \overline{X}$)

$\overline{X}$ は X を含む最小の閉集合です。

問2.7　このことを示せ。

(任意の閉集合 $A \supset X$ に対し、$A \supset \overline{X}$ が成り立つことを示せ。)

従って、X が閉集合であるための必要十分条件は $\overline{X} = X$ です。

問2.8　$X \subset Y$ のとき、$\overline{X} \subset \overline{Y}$ が成り立つことを示せ。

$\mathbf{R}$ においては、任意の有界閉区間 $[a, b]$, 任意の無限閉区間 $(-\infty, b]$, $[a, +\infty)$, $\mathbf{R}$ 全体は閉集合です。

$\emptyset$ も閉集合と考えます。($\because\ \emptyset = \mathbf{R}^c$)

$\mathbf{R}$ の有界区間(a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$ は、いずれも内部は (a, b), 境界は $\{a, b\}$, 閉包は $[a, b]$ です。

また、無限区間$(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$ は、いずれも内部は $(a, +\infty)$, 境界は $\{a\}$, 閉包は $[a, +\infty)$ です。$+\infty$ は $\mathbf{R}$ の元(つまり実数) ではないので、$[a, +\infty]$ とは考えないことに注意して下さい。

全く同様に$(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$ は、いずれも内部は $(-\infty, b)$, 境界は $\{b\}$, 閉包は $(-\infty, b]$ で、$[-\infty, b]$ とは考えません。

($[a, +\infty]$ や $[-\infty, b]$, 或いは $[-\infty, +\infty]$ は、後期の位相数学2における位相空間のコンパクト化の処や、３年次の解析学3,4などで出て来るかもしれません。)

$\mathbf{R}^2$ の部分集合である開円板

$$B(\boldsymbol{a}, \epsilon) = \{\boldsymbol{x} \mid ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}|| < \epsilon\}$$

の閉包は、閉円板

$$\overline{B(\boldsymbol{a}, \epsilon)} = \{\boldsymbol{x} \mid ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}|| \leq \epsilon\}$$

境界は円周

$$\partial B(\boldsymbol{a}, \epsilon) = \{\boldsymbol{x} \mid ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}|| = \epsilon\}$$

です。

また閉円板 $\overline{B(\boldsymbol{a}, \epsilon)}$ の内部は開円板 $B(\boldsymbol{a}, \epsilon)$, 境界は同上の円周です。

　開円板 $B(\boldsymbol{a}, \epsilon)$ と、同上の円周の任意の部分集合の和集合、つまり

$$B(\boldsymbol{a}, \epsilon) \subset X \subset \overline{B(\boldsymbol{a}, \epsilon)}$$

を満たす任意の X に対しても、その内部、閉包、境界は同上です。

　より複雑な集合では、境界点と言っても様々です。そこで、点 $\boldsymbol{a}$ が X の点であって、かつ少なくとも十分小さい $\epsilon > 0$ に対しては、ϵ 近傍 $B(\boldsymbol{a}; \epsilon)$ が $\boldsymbol{a}$ 以外に X の点を含まない、すなわち

$$\exists \epsilon > 0 \text{ s.t. } B(\boldsymbol{a}; \epsilon) \cap X = \{\boldsymbol{a}\}$$

が成り立つとき、$\boldsymbol{a}$ は X の孤立点であると言います。

開円板 $B(\boldsymbol{a},\epsilon)$ と、その(境界ではなく)外部にある有限個の点

$$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_k \in B(\boldsymbol{a},\epsilon)^e = \overline{B(\boldsymbol{a},\epsilon)}^c$$

との和集合

$$B(\boldsymbol{a},\epsilon) \cup \{\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_k\}$$

において、これらの付け加えた点 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_k$ は、いずれも孤立点です。

また、有限個の点のみからなる集合 $\{\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_k\}$ (これは特に複雑な集合ではありませんが) は閉集合となりますが、この場合も、各点はいずれも孤立点です。

孤立点は境界点になりますが、日常の感覚では、境界と言うには違和感があるかもしれません。

一方、点 $\boldsymbol{a}$ が X の点であってもなくても、任意の $\epsilon > 0$ に対して、ϵ 近傍 $B(\boldsymbol{a};\epsilon)$ が $\boldsymbol{a}$ 以外の X の点を含む、すなわち

$$\forall\epsilon > 0, B(\boldsymbol{a};\epsilon) \cap (X \setminus \{\boldsymbol{a}\}) \neq \emptyset$$

が成り立つとき、$\boldsymbol{a}$ は X の集積点であると言います。

$\epsilon > 0$ をどんどん小さいものと取り替えて行けば、X の点で $\boldsymbol{a}$ にいくらでも近い X の点が取れるので、集積点 $\boldsymbol{a}$ は X の点でなくても、X の収束する点列の極限にはなります。点列の収束については、次回もう少し詳しく説明します。

定義より、境界点は孤立点でなければ集積点です。集積点は境界点か内点のいずれかです。全体集合が $\mathbf{R}^n$ の場合、X の内点は全て集積点です。

$\mathbf{R}$ の場合、その部分集合として$\mathbf{N}$ や $\mathbf{Z}$ を考えると、その点は全て孤立点です。これらは境界点のみからなる閉集合です。

問2.9　$\mathbf{R} \supset \mathbf{Z}$ において、これらの主張が成り立つことを示せ。

また部分集合として $\mathbf{Q}$ を考えると、$\mathbf{R}$ の点は全て $\mathbf{Q}$ の集積点かつ境界点です。$\mathbf{Q}$ は $\mathbf{R}$ の開集合でも閉集合でもなく、その内部は $\emptyset$, 閉包は $\mathbf{R}$ 全体です。

($\mathbf{R} \supset \mathbf{Q}$ において、これらの主張が成り立つことについては、§3 の問で出題します。)

問2.10　任意の $X \subset \mathbf{R}^n$ に対して、$X^i \subset X$ より $\overline{X^i} \subset \overline{X}$ は常に成り立つ。この包含関係において、等号が成り立たない、すなわち $\overline{X^i} \neq \overline{X}$ となるような X の例を挙げ、その理由も述べよ。

問2.11　任意の $X \subset \mathbf{R}^n$ に対して、次の問に答えよ。

(1)　$(X^e)^e = \overline{X}^i$ が成り立つことを示せ。

(2)　$X \subset \overline{X}$ より $X^i \subset \overline{X}^i = (X^e)^e$ は常に成り立つ。この包含関係において、等号が成り立たない、すなわち $X^i \neq (X^e)^e$ となるような X の例を挙げ、その理由も述べよ。

さて、$\mathbf{R}$ において、開区間の場合、無限個の和集合も開集合になりますが、有限個なら共通部分も開集合になります。しかし、無限個の共通部分は開集合になるとは限りません。例えば、

$$\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n} \right) = [a, b]$$

は開集合ではありません。

　より一般に、 $\mathbf{R}^n$ においても、有限個無限個を問わず、

(O2) 開集合の和集合は開集合になり、

また

(O3) 有限個の開集合の共通部分も開集合になります。

問2.12　 $\mathbf{R}^n$ において、(O2),(O3) が成り立つことを、定義に戻って示せ。

　実は一般の位相空間を導入する際、この二つの性質(O2),(O3)((O3) は条件としては2個で成り立てば十分) に加えて、

(O1) 全体集合と空集合は開集合である

と言う条件によって、開集合系すなわち位相 $\mathfrak{O}$ を定義します。なお、一般の場合にも、無限個の開集合の共通部分は、開集合になるとは限りません。

$\mathbf{R}$ において、上の命題の対偶をとると、閉区間の場合、無限個の共通部分も閉集合になりますが、有限個なら和集合も閉集合になります。しかし、無限個の和集合は閉集合になるとは限りません。例えば、

$$\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\left[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right]=(a,b)$$

は閉集合ではありません。

　より一般に、$\mathbf{R}^n$ においても、有限個無限個を問わず、

(A2) 閉集合の共通部分は閉集合になり、

また

(A3) 有限個の閉集合の和集合も閉集合になります。

問 2.13　$\mathbf{R}^n$ において、(A2),(A3) が成り立つことを、定義に戻って示せ。

　一般の位相空間を導入する際、この二つの性質 (A2),(A3) ((A3) は条件としては2個で成り立てば十分) に加えて、

(A1) 全体集合と空集合は閉集合である

と言う条件によって、閉集合系 $\mathfrak{A}$ を定義し、それらの補集合の系として、位相 $\mathfrak{O} := \{A^c \mid A \in \mathfrak{A}\}$ を定めることもできます。なお、無限個の閉集合の和集合は、閉集合になるとは限らないのも同様です。

問 2.14　次の集合 X は $\mathbf{R}^2$ の開集合か、閉集合か、そのどちらでもないか、定義に戻って示せ。

(a) $X = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} B((2^{1/n} - 1, 0); 2^{1/n})$

(b) $X = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \overline{B((2^{-1/n} - 1, 0); 2^{-1/n})}$

(問 2.14 については、各小問毎に別の問題とみなすこと)