位相数学1＆同演習・講義資料

$\boxed{\text{第４回}}$

(2024年5月8日(水)講義分)

§3　$\mathbf{R}^n$ の点列の収束と開集合、閉集合

　この講義では、関数や写像の連続性について、これまで極限を用いて表して来たことを、開集合の言葉で言い換えることを試みて来ました。

　極限と言えばもう一つ、数列または点列の極限がありました。これらはどのように言い換えることができるでしょうか？

$\{a_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ は$\mathbf{R}$ 内の(無限)数列とします。k が限りなく大きくなるときa_k が実数 α に収束する

$$a_k \to \alpha \quad (k \to \infty)$$

言い換えると、$k \to \infty$ のときのa_k の極限値は α である

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \alpha$$

と言うことを、数学要論Bでは、ϵ-K 論法(ϵ-N 論法だったかもしれませんが、今回は n を次元を表すのに用いているので) と呼ばれるものを用いて、

$$\forall\epsilon > 0, \exists K = K(\epsilon) \in \mathbf{N} \text{ s.t. } k \geq K \Longrightarrow |a_k - \alpha| < \epsilon$$

と表しました。

$\{\boldsymbol{a}_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ は$\mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$ 内の(無限)点列とします。k が限りなく大きくなるとき$\boldsymbol{a}_k$ が点 $\boldsymbol{a}$ に収束する

$$\boldsymbol{a}_k \to \boldsymbol{a} \quad (k \to \infty)$$

言い換えると、$k \to \infty$ のときの$\boldsymbol{a}_k$ の極限(点)は $\boldsymbol{a}$ である

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{a}$$

と言うことも、ϵ-K 論法を用いて、

$$\forall\epsilon > 0, \exists K = K(\epsilon) \in \mathbf{N} \text{ s.t. } k \geq K \Longrightarrow ||\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a}|| < \epsilon$$

と表しました。

数列の極限値については、もちろんこれの $n = 1$ の場合と考えて、統一的に理解できます。

ここで $\mathbf{R}^n$ の２点間の距離を、$d(\cdot,\cdot)$ で表すことにすると、

$$\forall\epsilon>0, \exists K=K(\epsilon)\in\mathbf{N} \text{ s.t. } k\geq K \Longrightarrow d(\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{a})<\epsilon$$

さらに ϵ 近傍を用いれば、

$$\forall\epsilon>0, \exists K=K(\epsilon)\in\mathbf{N} \text{ s.t. } k\geq K \Longrightarrow \boldsymbol{a}_k\in B(\boldsymbol{a};\epsilon) \tag{3.1}$$

と表し直せます。

このことから、点 $\boldsymbol{a}$ を含む任意の開集合 O に対しても、開集合の定義より、$\boldsymbol{a}$ は O の内点ですから、$B(\boldsymbol{a};\epsilon) \subset O$ を満たす $\epsilon = \epsilon(O) > 0$ が存在し、この ϵ に対し、上の $K = K(\epsilon) \in \mathbf{N}$ をとれば、

$$k \geq K \Longrightarrow \boldsymbol{a}_k \in B(\boldsymbol{a};\epsilon) \subset O$$

が成り立ちます。ここで $K'(O) := K(\epsilon(O))$ とおけば

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{a} \in \forall O : \text{開集合}, \\ &\exists K' = K'(O) \in \mathbf{N} \text{ s.t. } k \geq K' \Longrightarrow \boldsymbol{a}_k \in O \end{aligned} \tag{3.2}$$

を得ます。

逆に、(3.2) が成り立つとき、任意の $\epsilon > 0$ に対し、$B(\boldsymbol{a}; \epsilon)$ もまた、点 $\boldsymbol{a}$ を含む開集合ですから、$K(\epsilon) := K'(B(\boldsymbol{a}; \epsilon))$ とおけば、(3.1) が導かれます。

すなわち、(3.1) と (3.2) は同値で、点列の収束が、開集合を使って表せたことになります。

このことを逆手にとって、$\mathbf{R}^n \supset X$ が開集合であることを、点列の収束を用いて特徴付けることもできます。

実際、X が開集合のとき、任意の点 $\boldsymbol{a} \in X$ と、$\boldsymbol{a}$ に収束する任意の点列 $\{\boldsymbol{a}_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ に対し、(3.2)の２行目の主張

$$\exists K'' = K''(\{\boldsymbol{a}_k\}_{k\in\mathbf{N}}) \in \mathbf{N} \text{ s.t. } k \geq K'' \Longrightarrow \boldsymbol{a}_k \in X$$

が成り立ちます。(今回は X を固定して考えているため、K' も点列に依存するので、K'' に書き換えています。)

それでは、逆はどうでしょうか？

X が開集合でないとき、X は内点でない点、つまり境界上の点を少なくとも一つ含みます。そのような点の一つを $\boldsymbol{b}$ とすると、任意の $\epsilon > 0$ に対し、ϵ 近傍 $B(\boldsymbol{b}; \epsilon)$ が、X^c と交わる点、すなわち X に含まれない点を含みます。

そこで、各 $k \in N$ に対し、$\epsilon = \dfrac{1}{k} > 0$ ととったときの

$$\boldsymbol{b}_k \in B(\boldsymbol{b}; \frac{1}{k}) \cap X^c$$

を一つずつ選ぶと、

$$||\boldsymbol{b}_k - \boldsymbol{b}|| < \frac{1}{k} \to 0 \quad (k \to \infty)$$

より $\{\boldsymbol{b}_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ は、$\boldsymbol{b} \in X$ に収束するにもかかわらず、全ての項が X に含まれない点の列となりますから、

$$\exists K'' \in \mathbf{N} \text{ s.t. } k \geq K'' \Longrightarrow \boldsymbol{b}_k \in X$$

は成り立ちません。

以上より、逆(正確には逆の対偶である裏) も成り立つことが示せましたので、X が開集合であることが、前々頁の赤字の条件を満たすことと同値であることがわかりました。

問3.1　任意の有理数に対し、これに収束する無理数の列が存在することを示せ。

(これから、任意の有理数は $\mathbf{Q}$ の内点ではなく、境界点であることが分かります。)

一方、$\mathbf{R}^n \supset X$ が閉集合であることも、点列の収束を用いて特徴付けることができます。

X が閉集合のとき、任意の収束する X の点列 $\{\boldsymbol{a}_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ に対し、その極限を $\boldsymbol{a}$ とします。

もし

$$\exists k \in \mathbf{N} \text{ s.t. } \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{a}$$

ならば、$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_k \in A$ です。

一方、

$$\forall k \in \mathbf{N}, \boldsymbol{a}_k \neq \boldsymbol{a}$$

ならば、$\boldsymbol{a}$ が点列$\{\boldsymbol{a}_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ の極限であることの定義

$$\forall \epsilon > 0, \exists K = K(\epsilon) \in \mathbf{N} \text{ s.t. } k \geq K \Longrightarrow \boldsymbol{a}_k \in B(\boldsymbol{a}; \epsilon)$$

と併せて

$$\boldsymbol{a}_k \in B(\boldsymbol{a}; \epsilon) \cap (X \setminus \{\boldsymbol{a}\})$$

より

$$B(\boldsymbol{a}; \epsilon) \cap (X \setminus \{\boldsymbol{a}\}) \neq \emptyset$$

が成り立つので、$\boldsymbol{a}$ は X の集積点となり、今 X は閉集合ですから、やはり $\boldsymbol{a} \in X$ が成り立ちます。

逆に、任意の収束する X の点列$\{\boldsymbol{a}_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ に対し、その極限 $\boldsymbol{a}$ も X に含まれると仮定しましょう。

今、X の任意の集積点 $\boldsymbol{a}$ に対して、

$$\forall\epsilon > 0, B(\boldsymbol{a};\epsilon)\cap(X\setminus\{\boldsymbol{a}\})\neq\emptyset$$

が成り立ちますから、各 $k\in N$ に対し、$\epsilon=\dfrac{1}{k}>0$ ととったときの

$$\boldsymbol{a}_k\in B(\boldsymbol{a};\frac{1}{k})\cap(X\setminus\{\boldsymbol{a}\})$$

を一つずつ選ぶと、

$$||\boldsymbol{a}_k-\boldsymbol{a}||<\frac{1}{k}\to 0\quad(k\to\infty)$$

より、この点列 $\{\boldsymbol{a}_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ は$\boldsymbol{a}$ に収束します。従って、仮定より $\boldsymbol{a}\in X$ が成り立ちます。

一方、X の孤立点は、(存在するとすれば) X の点なので、結局 X の境界上の点は全て X に含まれることになり、X は閉集合となります。

以上より、X が閉集合であることが、前頁の赤字の条件を満たすことと同値であることがわかりました。

問 3.2　任意の無理数に対し、これに収束する有理数の列が存在することを示せ。

(これから、任意の無理数は $\mathbf{Q}$ の外点ではなく、境界点であることが分かります。)

問 3.3　前々頁の赤字の条件を用いて得られる、$\mathbf{R}^n \supset Y$ が開集合であるための必要十分条件を述べよ。

問 3.4　$\mathbf{R}$ の上に有界な部分集合 X の上限 a は、X の上界全体の集合の集積点であることを示せ。

問 3.5　$\mathbf{R}$ の上に有界な部分集合 X の上限 a が X の最大元でないとき、a は X の集積点であることを示せ。