位相数学1＆同演習・講義資料

第５回

(2024年5月15日(水)講義分)

§4　$\mathbf{R}^n$ の部分集合の開集合、閉集合

写像 $F:\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ が連続であるとは、任意の開集合の逆像が開集合であることだと言うことについては、§1 でお話しました。その際、説明を簡略化するため、定義域(始集合)が $\mathbf{R}^m$ 全体、終集合が $\mathbf{R}^n$ 全体である場合を考えましたが、ここを簡略化しなければ、どうなるのかと言うのが、今回のお話です。

とりあえず $m=n=1$ すなわち 1 変数関数で、しかし定義域が $\mathbf{R}$ 全体でない場合について考えてみましょう。例えば、無理関数 $f(x)=\sqrt{x}$ は無限閉区間 $[0,+\infty)$ で定義されますが、連続関数として扱われます。問題はもちろん定義域の左端 $x=0$ です。

　ここでの連続性の定義は

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

ですが、今 $f(x) = \sqrt{x}$ は $x \geq 0$ でしか定義されていないため、左辺の極限は、実質的には右極限しか考えておらず、

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = f(0)$$

(ここは通常 $+0$ と略記されることが多い処ですが、混乱の無いよう省略せずに書いています) としても同じことです。

　しかしながら、極限の定義で、近付き方によらずと言う場合、左から近付きようが無いなら、そこは気にしなくてもよく、右極限をもって、通常の極限と考えることになっていました。つまり、定義域に無い部分である $(-\infty, 0)$ は最初から無かったものと扱えと言うことです。

ところが今、終集合 $\mathbf{R}$ の開集合として、例えば開区間 $I=(-1,1)$ を取ると、その $f(x)=\sqrt{x}$ による逆像は何かと言うと、

$$f^{-1}(I)=\{x \mid f(x)\in I\}=\{x \mid -1<\sqrt{x}<1\}=[0,1)$$

となり、この $[0,1)$ は開集合ではありません。

このままでは「任意の開集合の逆像が開集合」は成り立たないことになってしまいます。しかし、ここで注意して欲しいのは、$[0,1)$ が開集合でないと言うのは、あくまで、今回定義域でない $\mathbf{R}$ にとって開集合ではないだけだと言うことです。

上の主張は厳密には「終集合の任意の開集合の逆像が定義域の開集合」と言うことで、要は $[0,1)$ が $[0,+\infty)$ の開集合と見なせるように、開集合が定義されていればよい訳です。

以下、その点に留意して、$\mathbf{R}$ もしくは $\mathbf{R}^n$ の(それ自身ではなく)部分集合を全体と見たときの、さらにその部分集合について、内点、内部、開集合(であること)などを、定義し直してみましょう。と言っても、これまでと別の定義をする訳ではなく、同じ定義を、慎重に読み替えて行くだけのことです。

一般に $\mathbf{R}^n \supset X$ において、任意の点 $\boldsymbol{a} \in X$ と任意の実数 $\epsilon > 0$ に対し、$\boldsymbol{a}$ との距離が ϵ 未満であるような X の点全体の集合

$$B(\boldsymbol{a};\epsilon)\cap X := \{\boldsymbol{x}\in X \mid ||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|| < \epsilon\}$$

を $\boldsymbol{a}$ の X における ϵ 近傍と呼びます。

誤解を生じる恐れの無い場合には、$B(\boldsymbol{a};\epsilon)\cap X$ 自身を $B(\boldsymbol{a};\epsilon)$ と表すことも多いのですが、ここでは、X における ϵ 近傍と $\mathbf{R}^n$ における ϵ 近傍とが同時に登場し、かつそれらの関係を明記しておきたいので、上のように表記しています。同様に、「X における」も、紛れが無い場合には、省略されます。

さらに X の部分集合 Y において、点 $\boldsymbol{a} \in Y$ に対し、少なくとも十分小さい $\epsilon > 0$ に対しては、ϵ 近傍 $B(\boldsymbol{a};\epsilon)\cap X$ もまた Y の部分集合である、すなわち

$$\exists\epsilon > 0 \text{ s.t. } B(\boldsymbol{a};\epsilon)\cap X \subset Y$$

が成り立つとき、$\boldsymbol{a}$ は X における Y の内点であると言い、また Y は X における $\boldsymbol{a}$ の近傍であると言います。そして Y に属する全ての点が、X における Y の内点であるとき、Y は X の開集合であると言います。

X の開集合であることと、$\mathbf{R}^n$ の開集合と X の共通部分であることは同値です。

$\mathbf{R}^n$ の位相(開集合系)を $\mathfrak{O}$ と表すとき、

$$\mathfrak{O}_X := \{O \cap X \mid O \in \mathfrak{O}\}$$

とおけば、この $\mathfrak{O}_X$ は条件 (O1),(O2),(O3) を満たします。

問 4.1 このことを示せ。

これを X の $\mathbf{R}^n$ の部分集合としての相対位相と呼び、$(X, \mathfrak{O}_X)$ は $(\mathbf{R}^n, \mathfrak{O})$ の部分位相空間であると言います。

問 4.2 X が $\mathbf{R}^n$ の開集合のとき、$X \supset Y$ が X の開集合であることと、$\mathbf{R}^n$ の開集合であることは、同値であることを示せ。

上の定義に従えば、特に無限または有界開区間$X=(a,+\infty)$, $(-\infty,b)$, (a,b) の場合、その開集合は、X に含まれる $\mathbf{R}$ の開集合ですが、無限閉区間$X=[a,+\infty)$ の開集合は、

(1)　X に含まれる $\mathbf{R}$ の開集合 O,

(2)　半開区間 $[a,a+\epsilon)$ $(\epsilon>0)$,

(3)　$O\cup[a,a+\epsilon)$,

のいずれかと言うことになります。

同様に、無限閉区間 $X=(-\infty,b]$ の開集合は、

(1)　X に含まれる $\mathbf{R}$ の開集合 O',

(2)　半開区間 $(b-\epsilon,b]$ $(\epsilon>0)$,

(3)　$O'\cup(b-\epsilon,b]$,

のいずれか、

有界閉区間 $X = [a, b]$ $(a < b)$ の開集合は、

(1)　X に含まれる $\mathbf{R}$ の開集合 O'',

(2)　半開区間 $[a, a+\epsilon)$, $(b-\epsilon, b]$ $(\epsilon, \epsilon' \in (0, b-a))$,

(3)　$O'' \cup [a, a+\epsilon)$, $O'' \cup (b-\epsilon', b]$,

$[a, a+\epsilon) \cup (b-\epsilon', b]$, $O'' \cup [a, a+\epsilon) \cup (b-\epsilon', b]$,

のいずれかです。

問4.3　有界半開区間 $X = [a, b)$, $(a, b]$ $(a < b)$ の開集合は、それぞれ $\mathbf{R}$ のどのような部分集合か答えよ。

(定義を聞いているのではなく、上記の例のような言い換えを求めています。

答え方は一通りではありません。)

さて、$X \subset \mathbf{R}^n$ のとき、この X と $\mathbf{R}^n$ を関係付ける最も基本的な写像は、包含写像

$$\iota_X : X \to \mathbf{R}^n$$

$$\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}$$

でしょう。ここで X の位相(開集合系)が、先に定義した $\mathfrak{O}_X$ により与えられていたとすると、$\mathbf{R}^n$ の任意の開集合 O に対し、

$$\iota_X{}^{-1}(O) = O \cap X$$

が X の開集合となりますから、ι_X は連続写像となります。

さらに、$\mathbf{R}^n$ 上で定義された任意の連続写像 $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^\ell$ の定義域を X に制限した写像

$$\begin{aligned} F|_X : X &\to \mathbf{R}^\ell \\ \boldsymbol{x} &\mapsto F(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

は

$$F|_X = F \circ \iota_X$$

と表せることから、$\mathbf{R}^\ell$ の任意の開集合 O に対し、

$$(F|_X)^{-1}(O) = (F \circ \iota_X)^{-1}(O) = {\iota_X}^{-1}(F^{-1}(O))(= F^{-1}(O) \cap X)$$

は X の開集合です。従って、$F|_X$ もまた連続写像と言うことになり、大変都合がよいと言えます。

ここで X にどのような位相(開集合系) $\mathfrak{O}'$ を考えるとしても、ι_X が連続となるためには、$\mathfrak{O}_X$ の各元がその位相 $\mathfrak{O}'$ に関して開集合であること(つまり $\mathfrak{O}_X \subset \mathfrak{O}'$)は必要です。ι_X が連続となるような位相 $\mathfrak{O}'$ としては、$\mathfrak{O}_X$ にさらに開集合を追加した位相がいくらでも考えられますが、$\mathfrak{O}_X$ は、そのような位相の中で最も弱い(包含関係に関して小さい) 位相です。

このように、基本的な写像が連続となるような最も弱いまたは強い位相を定めると言う考え方は重要で、今後(主に後期の位相数学2で)繰り返し出て来ます。射影と積位相、商写像と商位相などの関係が、その典型的な例です。

一方、今度は$\mathbf{R}^m$上で定義された任意の連続写像$F : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$の終集合を、値域を含む X に狭めた写像

$$G : \mathbf{R}^m \to X(\subset \mathbf{R}^n)$$
$$\boldsymbol{x} \mapsto F(\boldsymbol{x})$$

においても、X の任意の開集合 $O \cap X$ (ここで O は $\mathbf{R}^n$ の開集合) に対し、

$$\begin{aligned} G^{-1}(O \cap X) &= F^{-1}(O \cap X) \\ &= F^{-1}(O \cap X) \cup F^{-1}(O \setminus X) \quad (\because\ F^{-1}(O \setminus X) = \emptyset\ ) \\ &= F^{-1}((O \cap X) \cup (O \setminus X)) \\ &= F^{-1}(O) \end{aligned}$$

は $\mathbf{R}^m$ の開集合です。従って、G もまた連続写像と言うことになり、やはり大変都合がよいのです。

これは既に述べたように、ι_X が連続となる最も弱い位相を選んだことが功を奏しています。実際 X に他にも開集合があると、その G による逆像が開集合であるかどうかは、一概に言えないことになってしまいます。

問4.4 $\mathbf{R} \supset O$ が$\mathbf{R}$ の通常の位相に関して開集合であることと、写像

$$\begin{aligned} \iota_{\mathbf{R}} : \mathbf{R} &\to \mathbf{R}^2 \\ x &\mapsto (x, 0) \end{aligned}$$

により$\mathbf{R}$ を $\mathbf{R}^2$ の部分位相空間と見なして定めた相対位相に関して開集合であることは、同値であることを示せ。

さて、$\mathbf{N}$ や $\mathbf{Z}$ に $\mathbf{R}$ の部分位相空間としての相対位相を入れると、どうなるでしょうか。

$X = \mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ においては、隣り合う最も近い点どうしの距離が 1 ですから、$0 < \epsilon < 1$ ととると、任意の $a \in X$ に対して、

$$B(a;\epsilon) \cap X = \{a\}$$

が成り立つので、1 点集合 $\{a\}$ が、点 a の X における ϵ 近傍となります。

この場合、任意の 1 点集合が開集合なので、それらの和集合も開集合と言うことは、結局、全ての部分集合が開集合となります。このような位相空間を離散位相空間と呼びます。

問 4.5　$\mathbf{R}^n$ の任意の有限部分集合は離散位相空間となることを示せ。

一方、$\mathbf{Q}$ に $\mathbf{R}$ の部分位相空間としての相対位相を入れると、任意の $a \in Q$ と任意の $\epsilon > 0$ に対して、

$$B(a;\epsilon) \cap Q \neq \{a\}$$

であり、1 点集合 $\{a\}$ は開集合にはなりません。

従って、$\mathbf{Q}$ は $\mathbf{N}$ や $\mathbf{Z}$ と濃度は同じ可算無限集合であるにもかかわらず、$\mathbf{R}$ の部分位相空間として、そこに入る位相は、離散位相とはまた別の位相になります。

問4.6

$$X := \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbf{N} \right\}$$

とする。X 及び $\overline{X}$ に $\mathbf{R}$ の部分位相空間としての相対位相を入れたとき、それぞれ離散位相空間となるか否かを、理由を付けて答えよ。

数学要論Bで学んだ、切断による $\mathbf{R}$ の定義は、$\mathbf{Q}$ を上下二つの無限区間に分ける分け方が

(1)　下組の最大元は存在せず、かつ上組の最小元が存在する。

(2)　下組の最大元が存在し、かつ上組の最小元は存在しない。

(3)　下組の最大元、上組の最小元、共に存在しない。

(4)　下組の最大元、上組の最小元、共に存在する。

の内、(4) 以外の全ての可能性があり、(1),(2) についてはある有理数 a (下組の最大元または上組の最小元) により、有理数のみからなる区間(これまでの表記では $\cap\mathbf{Q}$ が必要な処ですが、以下では省略) を用いて、

(1)　$(-\infty, a]$ と $(a, +\infty)$,

(2)　$(-\infty, a)$ と $[a, +\infty)$,

と表せますが、

(3) については、

(3) $\quad (-\infty, b)$ と $(b, +\infty)$,

と表そうにも、b が有理数では $\{b\}$ が残ってしまって、$\mathbf{Q}$ を二つに分けたことにならないので、その隙間を表す有理数ではない新たな数として実数を導入すると言うものでした。

このことは、$\mathbf{Q}$ が $\mathbf{R}$ において稠密である、すなわち $\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$ を満たすことと深く関わっています。このことについては、この講義の後半で詳しく扱います。

ちなみに、稠密でない $\mathbf{N}$ や $\mathbf{Z}$ を上下二つに分ける場合は、(4) の可能性しかありません。