位相数学1＆同演習・講義資料

$\boxed{\text{第６回}}$

(2024年5月22日(水)講義分)

§5　$\mathbf{R}^n$ の部分集合間の連続写像、開写像、同相写像

　$X \subset \mathbf{R}^m$, $Y \subset \mathbf{R}^n$ とし、写像 $f : X \to Y$ を考えます。

　$\mathbf{R}^m$ の部分位相空間としての X の相対位相を $\mathfrak{O}_X$ で、$\mathbf{R}^n$ の部分位相空間としての Y の相対位相を $\mathfrak{O}_Y$ で、それぞれ表すとき、f が連続写像であることが

$$\forall O \in \mathfrak{O}_Y, f^{-1}(O) \in \mathfrak{O}_X$$

言い換えれば

$$O \in \mathfrak{O}_Y \implies f^{-1}(O) \in \mathfrak{O}_X$$

と表せることについては、既にお話しました。

($f^{-1}(O) := \{x \in X \mid f(x) \in O\}$ は O の f による逆像であり、記号 f^{-1} は f の逆写像を表している訳ではなく、そもそも逆写像が存在するとも限りません。)

　一方、

$$\forall O' \in \mathfrak{O}_X, f(O') \in \mathfrak{O}_Y$$

言い換えれば

$$O' \in \mathfrak{O}_X \implies f(O') \in \mathfrak{O}_Y$$

が成り立つとき、f は開写像であると言います。
($f(O') := \{f(x) \in Y \mid x \in O'\} = \{y \in Y \mid \exists x \in O' \text{ s.t. } y = f(x)\}$ は O' の f による像であり、記号 $f(O')$ の f は X から Y への写像そのものを表している訳ではありません。)

　特に f が全単射のとき、逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ が存在して、任意の $O' \in \mathfrak{O}_X$ に対して、$f(O') = (f^{-1})^{-1}(O')$ (O' の f による像は、O' の f^{-1} による逆像) が成り立つので、f が開写像であることは、f^{-1} が連続写像であることと同値になります。

全単射 f が連続写像でありかつ逆写像 f^{-1} も連続写像のとき、f は同相写像であると言います。

f が同相写像であることは、全単射かつ連続写像かつ開写像であることと同値で、X と Y の位相(開集合系)の間にも、自然な全単射

$$\begin{aligned} \mathfrak{O}_X &\to \mathfrak{O}_Y \\ O' &\mapsto f(O') \end{aligned}$$

を引き起こします。開集合どうしが一対一に対応することから、f は開集合が関わる性質を保つので、位相同型写像とも呼ばれます。

一般に X と Y の間に同相写像が存在するとき、X と Y は同相であると言います。

問 **5.1**　同相は同値関係であることを示せ。

$\mathbf{R}$ の部分集合の内、

(1)　有界開区間 (a,b) $(a<b)$,

無限開区間 $(-\infty,b)$, $(a,+\infty)$,

$\mathbf{R}$ 自身($(-\infty,+\infty)$ と表すことも) .

(2)　有界半開区間 $(a,b]$, $[a,b)$ $(a<b)$,

無限閉区間 $(-\infty,b]$, $[a,+\infty)$.

(3)　有界閉区間 $[a,b]$ $(a<b)$.

は、a,b をいろいろ取り換えても、同じ組どうしはそれぞれ互いに同相ですが、違う組どうしは同相ではありません。

二つの位相空間が同相であることを示すには、一つでよいので同相写像を与えればよいだけです。

例えば (1) なら、

$$
\begin{aligned}
f_1 &: (a,b) \to (a',b'), & x &\mapsto \frac{b'-a'}{b-a}(x-a)+a' \\
f_2 &: (a,+\infty) \to (a',+\infty), & x &\mapsto (x-a)+a' \\
f_3 &: (a,+\infty) \to (-\infty,b), & x &\mapsto -(x-a)+b \\
f_4 &: \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}, & x &\mapsto \tan x \\
f_5 &: \mathbf{R} \to (0,+\infty), & x &\mapsto e^x
\end{aligned}
$$

が、それぞれ同相写像として存在するので、これらを必要に応じて逆写像を取りつつ合成すれば、(1) に含まれる任意の二つの位相空間の間の同相写像が得られます。(ここでは、初等関数、連続関数どうしの合成関数、単調な連続関数の逆関数の連続性は認めましょう。)

一方、同相でないことを示すには、同相写像が一つも存在しないことを証明しなければならないので、一般には少々工夫が必要です。

問5.2　$(0,1)$, $(0,1]$, $[0,1]$ は、それぞれ互いに同相でないことを示せ。

問5.3　$\mathbf{R}$ と $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ は同相でないことを示せ。

(どちらの問も、同相写像が存在すると仮定して、何か矛盾することを見つけて下さい。その際、$\mathbf{R}$ またはその区間で定義された連続関数が単射ならば狭義単調であることは、証明無しに用いても構いません。後で学ぶ連結性を用いた証明もありますが、とりあえず今回は「連結」と言う言葉を用いずに示すこと。)

$n \geq 2$ の場合、$\mathbf{R}^n$ またはその部分位相空間への写像の連続性は、各成分を表す関数が連続であるかどうかで判定できます。

一般に $X \subset \mathbf{R}^m$, $Y \subset \mathbf{R}^n$ で、写像 $F : X \to Y$ が関数

$$f_j : X \to \mathbf{R} \quad (j = 1, \ldots, n)$$

を用いて

$$F(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_n(\boldsymbol{x}))$$

と表せるとき、各 f_j が連続ならば、F もまた連続です。このことは、数学要論Bでϵ-δ 論法を用いて、既に示されたと思います。

このことは、位相を用いて理解することもできますが、それには多少準備を済ませてからの方が見通しがよいので、今回は一旦認めて話を進めましょう。

$\mathbf{R}^2$ の部分集合の内、

(1)　開円板 $B(\boldsymbol{a};\epsilon)$,

開長方形領域 $(a,b)\times(c,d)$ $(a<b, c<d)$,

境界を含まない半平面,

$\mathbf{R}^2$ 自身.

(2)　閉円板 $\overline{B(\boldsymbol{a};\epsilon)}$,

閉長方形領域 $[a,b]\times[c,d]$ $(a<b, c<d)$.

(3)　開円板 $B(\boldsymbol{a};\epsilon)$ と境界上の両端を含まない円弧の和集合,

開長方形領域 $(a,b)\times(c,d)$ $(a<b, c<d)$ と

境界上の両端を含まない折線の和集合(例えば $(a,b]\times(c,d]$),

境界を含む半平面.

は、いろいろ取り換えても、同じ組どうしはそれぞれ互いに同相ですが、違う組どうしは同相ではありません。

問 5.4　$(\mathbf{R}^2 \supset) B(\mathbf{0}; 1)$ と $\mathbf{R}^2$ は同相であることを示せ。

問 5.5　$(-1, 1) \times (-1, 1)$ と $(\mathbf{R}^2 \supset) B(\mathbf{0}; 1)$ は同相であることを示せ。

(どちらの問も、同相写像の具体例を一つ挙げよ。もちろん挙げた例が同相写像であることも示すこと。)

実は (1) の開円板や開長方形領域は、より一般の一つながりで穴の開いていない $\mathbf{R}^2$ の開集合 (単連結領域と言います) とも同相です。任意の点が特定の点と内部の線分で結べる場合 (星状領域)、特に任意の二点が内部の線分で結べる場合 (凸領域) には、その証明は難しくありません (問 5.5 はその特別な場合です) が、一般にはそう容易ではありません。

問 5.6　$\mathbf{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ と $\mathbf{R}^2$ の開円環領域 (半径の異なる二つの同心円に挟まれた開集合) $B(\mathbf{0};2) \setminus \overline{B(\mathbf{0};1)}$ は同相であることを示せ。

一方、$\mathbf{R}^2$ と $\mathbf{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ は同相ではありませんが、その証明も、$n = 1$ の場合 (問 5.3) と違って、実は結構難しかったりします。

ここで、$\mathbf{R}^2$ から $\mathbf{R}^2$ 自身への写像

$$
\begin{aligned}
F : \mathbf{R}^2 &\to \mathbf{R}^2 \\
(x_1, x_2) &\mapsto \left(\frac{{x_1}^3}{1+3{x_2}^2}, \frac{{x_2}^3+3x_2}{1+3{x_2}^2} \right)
\end{aligned}
$$

について考えてみましょう。

$F(x_1, x_2)$ の各成分は有理関数で、分母の $1+3{x_2}^2$ は常に正なので、$\mathbf{R}$ 全体で定義された連続関数です。従って、写像 F は $\mathbf{R}^2$ 全体で定義された連続写像です。

今、F の第2成分の関数(の変数を x に置き換えたもの) を

$$f_2(x) := \frac{x^3+3x}{1+3x^2}$$

とおくと、

$$f_2{}'(x) = \frac{3(x^2-1)^2}{(1+3x^2)^2} \geq 0$$

で、等号成立は $x = \pm 1$ の場合に限りますから、f_2 は狭義単調増加関数です。

さらに

$$\lim_{x\to-\infty} f_2(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f_2(x) = +\infty$$

より、f_2 の値域は $\mathbf{R}$ 全体です。従って f_2 は $\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ 自身への全単射で、連続な逆関数 $f_2{}^{-1} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を持ちます。

($f_2{}^{-1}(y)$ は、三次方程式の根の公式を用いれば、具体的に書けなくもありませんが、ここではその式自体は重要ではありません。)

この ${f_2}^{-1}$ を用いると、$(y_1, y_2) = F(x_1, x_2)$ が x_1, x_2 に関する連立方程式として解けて、F の逆写像 F^{-1} が

$$(x_1, x_2) = F^{-1}(y_1, y_2) = (\{y_1(1 + 3{f_2}^{-1}(y_2)^2)\}^{1/3}, {f_2}^{-1}(y_2))$$

と表せます。すなわち F は$\mathbf{R}^2$ から $\mathbf{R}^2$ 自身への全単射で、逆写像 F^{-1} も連続です。

以上より、F が $\mathbf{R}^2$ から $\mathbf{R}^2$ 自身への同相写像であることが、まず示されました。

さて、次に $\mathbf{R}^2$ の部分位相空間として、原点 $\mathbf{0}=(0,0)$ を中心とする単位円周

$$\mathbf{S}^1 := \{\boldsymbol{x} \mid ||\boldsymbol{x}|| = 1\} = \{(x_1, x_2) \mid {x_1}^2 + {x_2}^2 = 1\}$$

を考えます。

ここで、上の写像 F の $\mathbf{S}^1$ への制限 $F|_{\mathbf{S}^1} : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{R}^2$ を考えると、その値域もまた $\mathbf{S}^1$ になります。そこで、$F|_{\mathbf{S}^1}$ の終集合も $\mathbf{S}^1$ に縮めた写像を $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ とすると、この f は $\mathbf{S}^1$ から $\mathbf{S}^1$ 自身への全単射で、連続な F の $\mathbf{S}^1$ への制限なので連続、さらに逆写像 f^{-1} もやはり連続な F^{-1} の $\mathbf{S}^1$ への制限なので連続となり、結局 f は $\mathbf{S}^1$ から $\mathbf{S}^1$ 自身への同相写像であることがわかります。

ここでは、先に $\mathbf{R}^2$ の間の写像 F を与え、それを制限することで、部分位相空間である $\mathbf{S}^1$ の間の写像 f を定義して、F, F^{-1} の連続性から f, f^{-1} の連続性を導きましたが、これは逆に、部分位相空間の間の写像が先に与えられたとき、元の位相空間(この場合は定義域、終集合共に $\mathbf{R}^2$)の間の写像へと拡張することで、位相に関する性質を調べることもできることを示唆しています。(そもそも変数を 2 個用いて表している段階で、$\mathbf{R}^2$ の開集合への拡張を念頭に置いていると言ってよいでしょう。)

但し、その拡張の仕方は一通りではありません。

例えば、上の f は、F とは別の写像

$$G : \mathbf{R}^2 \setminus \left\{ (x_1, x_2) \;\middle|\; x_1 \neq \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \right\} \to \mathbf{R}^2$$
$$(x_1, x_2) \mapsto \left(\frac{{x_1}^3}{4 - 3{x_1}^2}, \frac{{x_2}^3 + 3x_2}{4 - 3{x_1}^2} \right)$$

の $\mathbf{S}^1$ への制限としても表せます。($\mathbf{S}^1$ 上では $1 + 3{x_2}^2 = 4 - 3{x_1}^2$ が成り立つため。)

しかし G は $\mathbf{R}^2$ 全体では定義されておらず、また単射でもありません。従って、F を用いた場合には自動的に示せた f の性質も、G を用いる場合には多少の補足説明が必要になったりします。

問 5.7 $(\mathbf{R}^2 \supset)\mathbf{S}^1$ と楕円

$$\left\{(x_1, x_2) \;\middle|\; \frac{(x_1 - c_1)^2}{{a_1}^2} + \frac{(x_2 - c_2)^2}{{a_2}^2} = 1\right\} \quad (a_1 > 0, a_2 > 0)$$

は同相であることを示せ。

問 5.8 $\mathbf{R}^2$ 内の4点$(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$ を、この順に線分で結んで一周する正方形の折線と$\mathbf{S}^1$ は同相であることを示せ。

(どちらの問も、示す方法はいろいろ考えられるが、ここでは $\mathbf{R}^2$ から $\mathbf{R}^2$ 自身への適当な同相写像の制限として、同相写像の例を与えよ。)

　混乱を招くのを避けて、後回しにしていましたが、今回前半でお話したことは、閉集合を用いて説明することも可能です。

　まず $f : X \to Y$ が連続写像であることですが、$\mathbf{R}^m$ の部分位相空間としての X の相対位相に関する閉集合系を $\mathfrak{A}_X$ で、$\mathbf{R}^n$ の部分位相空間としての Y の相対位相に関する閉集合系を $\mathfrak{A}_Y$ で、それぞれ表すとき、これは

$$\forall A \in \mathfrak{A}_Y, f^{-1}(A) \in \mathfrak{A}_X$$

言い換えれば

$$A \in \mathfrak{A}_Y \implies f^{-1}(A) \in \mathfrak{A}_X$$

とも表せました。

一方、

$$\forall A' \in \mathfrak{A}_X, f(A') \in \mathfrak{A}_Y$$

言い換えれば

$$A' \in \mathfrak{A}_X \implies f(A') \in \mathfrak{A}_Y$$

が成り立つとき、f は閉写像であると言います。閉写像であることは、開写像であることとは、一般には同値ではありません。

しかし、f が全単射のときには、これらは同値となるので、f が同相写像であることは、全単射かつ連続写像かつ閉写像であることとも同値となり、X と Y の閉集合系の間にも、自然な全単射

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_X &\to \mathfrak{A}_Y \\ A' &\mapsto f(A') \end{aligned}$$

を引き起こします。

また、任意の $X' \subset X$ に対して

$$f(\overline{X'}) \subset \overline{f(X')}$$

が成り立つことも、f が連続であることと同値です。(教科書の問 19.5)