位相数学1＆同演習・講義資料

$\boxed{\text{第７回}}$

(2024年5月29日(水)講義分)

§6　$\mathbf{R}^n$ の部分集合の連結性

一般に位相空間の同相写像で不変な性質(位相的性質などと呼びます)の中で、特に重要なものとして、「連結性」と「コンパクト性」があります。とりあえず $\mathbf{R}^n$ の部分集合(正確には部分位相空間) について、これらを導入しておきましょう。

今回の主題である連結性は、要するに、集合が一つにつながっているかどうかと言うことなのですが、その定義は抽象的なもので、掴み処が無い所があります。そこでその前に連結性とよく似た性質で、使い勝手のよい「弧状連結性」から先に、お話ししたいと思います。直感的には、弧状連結性の方が、つながっている感じは強いかもしれません。

なお、今回は重要な主張のいくつかの証明が、教科書の問題になっていますので、その番号を引用しています。

一般に位相空間 X において、任意の２点が曲線で結べるとき、X は弧状連結であると言います。より厳密に述べると、

$$\begin{aligned}&\forall x', \forall x'' \in X, \exists x : [0,1] \to X \ \text{：連続写像} \\ &\text{s.t. } x(0) = x', x(1) = x''\end{aligned}$$

となります。

$X \subset \mathbf{R}^n$ のとき、この定義は、

$$\begin{aligned}&\forall \boldsymbol{x}', \forall \boldsymbol{x}'' \in X, \exists \boldsymbol{x} : [0,1] \to \mathbf{R}^n \ \text{：連続写像} \\ &\text{s.t. } \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}(1) = \boldsymbol{x}'', \boldsymbol{x}([0,1]) \subset X\end{aligned}$$

と読み替えても構いません。つまり、曲線が X からはみ出さないように取れることが本質です。

ここで、曲線の定義域は $[0,1]$ でなくても、任意の有界閉区間 $[a,b]$ $(a < b)$ で構いません。$[0,1]$ と $[a,b]$ は同相なので、同相写像と合成すれば、条件として同値であることが直ちにわかります。

　写像 $f : X \to Y$ が連続の時、任意の弧状連結な $X' \subset X$ に対して、$f(X')$ もまた弧状連結になります。

($\because$ 　$f(x')$ と $f(x'')$ が $f(x(t))$ $(t \in [0,1])$ で結べるから。)

　特に f が同相写像ならば、$X \supset X'$ が弧状連結であることと、$Y \supset f(X')$ が弧状連結であることは同値(つまり弧状連結性は位相的性質) です。言い換えると、弧状連結な位相空間と同相な位相空間は弧状連結です。

問6.1 　$\mathbf{R}^2$ と $\mathbf{R}$ は同相でないことを示せ。

(この問が、前回ではなく今回ここで出題されたのは、もちろん証明に弧状連結性が使えるからです。)

さて、一般の位相空間 X において、同時に開かつ閉であるような部分集合が、全体集合 (この場合 X 自身のこと) か空集合のいずれかに限るとき、X は連結であると言います。

$\mathbf{R}^n$ の部分集合 X について連結性を考えるなら、§4 でお話しました$\mathbf{R}^n$ の部分位相空間としてのX の相対位相に関して開かつ閉であるような X の部分集合が、X 自身か空集合のいずれかに限るとき、X は連結であると言うことになります。

これを相対位相の定義に戻って、$\mathbf{R}^n$ の位相の言葉に読み替えて説明すると、次のようになります。

$\mathbf{R}^n$ の部分集合 X において、

$$X \subset U \cup V, \quad (U \cap X) \cap (V \cap X) = \emptyset$$

を満たす任意の二つの($\mathbf{R}^n$ の)開集合U, V に対して、

$$U \cap X = \emptyset \text{ または } V \cap X = \emptyset$$

が成り立つとき、X は連結であると言います。

すなわち、空でないかつ互いに素な二つの(X の) 開集合に分けることができないような集合 X を連結、つまりつながっていると言う訳です。

X が連結である(ない) ことは、連続関数

$$f : X \to \{0, 1\}$$

で定数関数でないものが、存在しない(する) ことと同値です。

$\mathbf{R}$ の部分位相空間としての$\{0, 1\}$ には離散位相が入っていて、一点集合

$$\{0\}, \quad \{1\}$$

が共に$\{0, 1\}$ の開集合なので、$f : X \to \{0, 1\}$ が連続であることは、

$$f^{-1}(\{0\}), \quad f^{-1}(\{1\})$$

が共に X の開集合であることと同値だからです。

一般に連結とは限らない X において、X' が X の連結部分集合ならば、

$$X' \subset X'' \subset \overline{X'}$$

(この閉包は X の位相に関するもの) を満たす任意の X'' もまた連結です。(問 25.2)

また、互いに素でない X', X'' が、共に X の連結部分集合ならば、$X' \cup X''$ もまた連結です。さらに X の部分集合族 $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ において、各 X_λ がいずれも連結で、かつどの二つも互いに素でないならば、

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

もまた連結です。(問 25.3(1))

前頁二つ目の事実から、任意の $x \in X$ に対し、x を含む全ての連結部分集合の和集合はやはり連結となります。この x を含む X の最大の連結部分集合を、(X における) x の連結成分と呼びます。

さらに前頁一つ目の事実から、連結成分は常に閉集合であることもわかります。連結成分の個数が有限個なら、各連結成分は開集合にもなります (問 26.3) が、無限個のときは、開集合になるとは限りません。(例 26.1)

同じ連結成分に含まれることは、同値関係となります(例題26.1, 問26.1)から、X が連結でないとき、X は空でないかつ互いに素な二つ以上の有限個または無限個の連結な部分集合(連結成分) C_μ $(\mu \in M)$ の和集合として

$$X = \bigcup_{\mu \in M} C_\mu$$

と表されます。

一般に、与えられた集合が連結であるか否かを、定義に戻って判定するのは、少々面倒なことも多いのですが、実は弧状連結ならば連結(問25.3(2)) であり、弧状連結であるか否かの判定は比較的容易な場合が多いので、弧状連結性は連結性の判定条件として有用です。

例えば $\mathbf{R}$ の部分集合では、

有界区間 (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,b]$,

無限区間 $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$,

$\mathbf{R}$ 自身

はどれも弧状連結(「線分」と言う名の「曲線」で結びます) ですから連結です。また、

一点集合 $\{a\}$

も弧状連結(一点で動かない「曲線」を考えます) かつ連結です。

逆に、$\mathbf{R}$ の(空でない) 弧状連結部分集合、連結部分集合は、これらに限ります。

一方、$\mathbf{R}$ から一点集合を除いた$\mathbf{R}\setminus\{a\}$ は連結でなく、その連結成分は$(-\infty, a)$ と $(a, +\infty)$ です。

問6.2 $\mathbf{R}$ の任意の開集合において、その連結成分の個数は高々可算無限個であることを示せ。

(高々可算無限個は、もちろん有限個の場合を含みます。)

$\mathbf{R}^2$ の部分集合の場合は、

開円板 $B(\boldsymbol{a}, \epsilon)$, 閉円板 $\overline{B(\boldsymbol{a}, \epsilon)}$,

$\mathbf{R}^2$ 自身, 一点集合 $\{\boldsymbol{a}\}$

の他に、より複雑な形状の弧状連結部分集合、連結部分集合が考えられます。

特に、連結な $B(\boldsymbol{a}, \epsilon)$ や $\mathbf{R}^2$ からから一点集合を除いた

$B(\boldsymbol{a}, \epsilon) \setminus \{\boldsymbol{a}\}$, $\mathbf{R}^2 \setminus \{\boldsymbol{a}\}$

も ($\mathbf{R} \setminus \{a\}$ とは違って) やはり連結です。

問6.3　このことを示せ。

2個以上の有限個の点からなる集合は連結でなく、また無限集合の$\mathbf{N}$ や $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ も連結ではありません。これらの集合の連結成分は、いずれも各点からなる一点集合たちです。

問6.4 写像 $f : X \to Y$ について、次の問に答えよ。

(1) X が離散位相空間のとき、f は連続であることを示せ。

(2) Y が離散位相空間のとき、写像 f が連続であるための条件を求めよ。

(この問が、前回ではなく今回ここで出題された理由を考えてみましょう。)

写像 $f : X \to Y$ が連続の時、(全単射でなくても) 任意の連結な $X' \subset X$ に対して、$f(X')$ もまた連結になります。

問6.5　このことを示せ。

(この証明には弧状連結性は使えません。)

特に f が同相写像ならば、$X \supset X'$ が連結であることと、$Y \supset f(X')$ が連結であることは同値(つまり連結性は位相的性質) です。言い換えると、連結な位相空間と同相な位相空間は連結です。

弧状連結性は連結性の判定条件として有効ですが、逆は成り立たない、すなわち連結だからと言って弧状連結とは限らない(例26.3) ので、注意が必要です。

問6.6　$\mathbf{R}^2$ の次の部分集合は、連結だが弧状連結ではないことを示せ。

$$\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \,\middle|\, x>0, y=\sin\frac{1}{x}\right\}\cup(\{0\}\times[-1,1])$$

連結性と弧状連結性に関しては、後期の位相数学2で、より詳しく扱います。