位相数学１＆同演習・講義資料

第８回

(2024年6月5日(水)講義分)

§7 $\mathbf{R}^n$ の部分集合のコンパクト性

もう一つの重要な位相的性質であるコンパクト性は、定義が少々厄介です。

X は $\mathbf{R}^n$ の部分集合とします。ここで $\mathbf{R}^n$ の開集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が

$$X \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$$

を満たすとき、X の開被覆と言います。今回は各 U_λ 同士は互いに素である必要は全くありません。寧ろお互いに交わっている場合を主に想定しています。

　さて、 X の任意の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が有限部分被覆を持つ、つまり、Λ の有限部分集合 Λ' を上手く選べば、それだけで

$$X \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda'} U_\lambda$$

が成り立つとき、X はコンパクトであると言います。ここで重要なのは、最初に与えるのが適当な都合の良い開被覆ではなく、任意のつまりどのような開被覆を与えても、その内の有限個で済むと言う所です。

写像 $f : X \to Y$ が連続の時、任意のコンパクトな $X' \subset X$ に対して、$f(X')$ もまたコンパクトになります。

(∵　$f(X')$ の任意の開被覆 $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対し、$\{f^{-1}(V_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ は X' の開被覆になるので、有限部分被覆を取って、f で送ればよい。)

特に f が同相写像ならば、$X \supset X'$ がコンパクトであることと、$Y \supset f(X')$ がコンパクトであることは同値(つまりコンパクト性は位相的性質)です。言い換えると、コンパクトな位相空間と同相な位相空間はコンパクトです。

$\mathbf{R}^n$ のコンパクトな部分集合は有界閉集合 でなければなりません。

ここで $\mathbf{R}^n$ の部分集合 X が有界であるとは、十分半径を大きくとりさえすれば、ある円の内部に含まれること

$$\exists R > 0 \text{ s.t. } X \subset B(\boldsymbol{a}; R)$$

を指しています。(この場合、中心 $\boldsymbol{a}$ は何でもよいので、原点 $\mathbf{0}$ に固定しておいた方が、すっきりするかもしれません。)

コンパクトであるために有界性が必要なのは、開被覆を取る際に有界開区間 $(n = 1)$ または開円板 $(n = 2)$ または開球体 $(n \geq 3)$ のみによる被覆を考えれば、すぐにわかります。($\because$ 有限個の有界集合の和集合は有界。)

一方、閉集合でなければならないことは、次のようにして示せます。

$\mathbf{R}^n \supset X$ は閉集合ではないとしましょう。このとき、X 自身には含まれない X の集積点が少なくとも一つ存在します。この点を $\boldsymbol{a}$ とします。今、次のような開集合の族を考えてみましょう。

$$B\left(\boldsymbol{x}; \frac{||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}||}{2}\right) \quad (\boldsymbol{x} \in X)$$

X の各点 $\boldsymbol{x}$ に対し、その点を含む開集合が用意されているので、この族は X を被覆します。

$$X \subset \bigcup_{\boldsymbol{x} \in X} B\left(\boldsymbol{x}; \frac{||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}||}{2}\right)$$

ところが、この中から有限個(の中心) $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_K$ を選んでしまうと、その中で、点 $\boldsymbol{a}$ に最も近い($\min\{d(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{a}) \mid k = 1, \ldots, K\}$ を実現する) $\boldsymbol{x}$ が選べます。その点が $\boldsymbol{x}_1$ であったとします。

一方、$\boldsymbol{a}$ は X の集積点ですから、

$$\boldsymbol{x}' \in B\left(\boldsymbol{a}; \frac{||\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{a}||}{2}\right)$$

を満たす $\boldsymbol{x}' \in X$ が存在します。

ここで三角不等式より、

$$||\boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}_k|| \leq ||\boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}'|| + ||\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}_k||$$

ですから

$$
\begin{aligned}
||\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}_k|| &\geq ||\boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}_k|| - ||\boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}'|| \\
&> ||\boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}_k|| - \frac{||\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{a}||}{2} \\
&\geq ||\boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}_k|| - \frac{||\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}||}{2} \\
&= \frac{||\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}||}{2} \qquad (k = 1, \ldots, K)
\end{aligned}
$$

が成り立ち、

$$
\boldsymbol{x}' \notin \bigcup_{k=1}^{K} B\left(\boldsymbol{x}_k; \frac{||\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}||}{2}\right)
$$

がわかります。

今、有限個(の中心) $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_K$ の選び方に制約はありませんでしたから、結局、どのように有限個の

$$B\left(\boldsymbol{x}_k; \frac{||\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}||}{2}\right) \quad (k = 1, \ldots, K)$$

を選んでも、それらの和集合で X 全体を覆いきれないことが示されました。

$\mathbf{R}^n$ においては、コンパクトな部分集合であることは実は有界閉集合であることと同値になります。この主張はハイネ・ボレルの被覆定理と呼ばれています。必要性は既に示しましたので、後は十分性ですが、その証明はもう少し面倒です。

説明を簡略化するため、ここでは $n = 1$ の場合について示しますが、一般の n でも証明は本質的に同じです。

まず $\mathbf{R} \supset X$ が有界閉区間の場合に示しておきます。

$X = [a_1, b_1]$ とおきます。$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を X の開被覆で、有限部分被覆を持たないようなものとします。このとき、

$$\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right], \quad \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$$

に対しても $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は開被覆となっていますが、少なくとも一方は有限部分被覆を持ちません。その一方を $[a_2, b_2]$ とします。このとき、$a_1 \leq a_2$ かつ $b_2 \leq b_1$ が成り立ちます。

以下、同様にして$[a_k, b_k]$ を等分して、$[a_{k+1}, b_{k+1}]$ を選んでゆくと、有限部分被覆を持たない、閉区間の列ができます。ここで左端点の列 a_k は上に有界な単調増加数列、右端点の列 b_k は下に有界な単調減少数列なので、それぞれ極限値を持ち、

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} b_k - \lim_{k\to\infty} a_k &= \lim_{k\to\infty}(b_k - a_k) \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}} \ = \ 0\end{aligned}$$

より、それらの極限値は一致します。その値を c とおくと、$a_1 \leq c \leq b_1$ より$c \in X$ なので、$c \in U_\lambda$ を満たす $\lambda \in \Lambda$ が少なくとも一つは存在します。

今 c は、この U_λ の内点なので、

$$\exists \epsilon > 0 \text{ s.t. } B(c;\epsilon) \subset U_\lambda$$

が成り立ちます。一方、$\lim_{k\to\infty}(b_k - a_k) = 0$ より

$$\exists K \in \mathbf{N} \text{ s.t. } k \geq K \Longrightarrow b_k - a_k < \epsilon$$

で、この K に対して、$a_K \leq c \leq b_K$ より、

$$c - a_K,\ b_K - c \leq b_K - a_K < \epsilon$$

が成り立つので、

$$[a_K, b_K] \subset B(c;\epsilon) \subset U_\lambda$$

を得ますが、これは$[a_K, b_K]$ が有限部分被覆を持たないことに反します。

$\mathbf{R} \supset X'$ が有界閉区間とは限らない、一般の有界閉集合とします。このとき、$X' \subset [a_1, b_1]$ を満たす有界閉区間が存在します。

今 $\{U'_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を X' の開被覆で、有限部分被覆を持たないようなものとすると、

$$U_\lambda := U'_\lambda \cup X'^c \qquad (\lambda \in \Lambda)$$

とおけば、$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は $[a_1, b_1]$ の開被覆で、有限部分被覆を持たないようなものとなりますから、これに既に示した主張をあてはめれば、一般の有界閉集合についての証明が得られます。

問 7.1 $\mathbf{R}$ の任意の(有界とは限らない)閉集合 X'' に対し、その任意の開被覆は高々可算な部分被覆を持つことを示せ。

この主張は $\mathbf{R}^n$ でも成り立つばかりか、実は X'' が閉と言う仮定も必要ありません(リンデレーフの被覆定理)。ただし、その証明は、やや難しくなります。

有界開区間 (a,b) はコンパクトではありませんが、その閉包である有界閉区間 $[a,b]$ はコンパクトです。一方 $\mathbf{R}$ は (a,b) と同相で、コンパクトではありません。

そこで $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$ に正負両方の無限遠点を加えた集合

$$[-\infty,+\infty]:=(-\infty,+\infty)\cup\{-\infty\}\cup\{+\infty\}$$

を考え、同相写像 $f:(a,b)\to(-\infty,+\infty)$ で

$$\lim_{x\to a}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to b}f(x)=+\infty$$

を満たすものを一つ選んで、その定義域と終集合を拡張した写像を

$$
\begin{aligned}
\hat{f} : [a,b] &\to [-\infty,+\infty] \\
x &\mapsto \begin{cases} f(x) & (a < x < b) \\ -\infty & (x = a) \\ +\infty & (x = b) \end{cases}
\end{aligned}
$$

により定義します。これはもちろん全単射です。

そして、この $\hat{f}$ が同相写像となるように、$[-\infty,+\infty]$ の位相を

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{O}_{[-\infty,+\infty]} &:= \{\hat{f}(O') \mid O' \in \mathfrak{O}_{[a,b]}\} \\
&= \{\hat{f}(O \cap [a,b]) \mid O \in \mathfrak{O}_{\mathbf{R}}\}
\end{aligned}
$$

と定めれば、$([-\infty,+\infty], \mathfrak{O}_{[-\infty,+\infty]})$ はコンパクトな位相空間となります。

このような位相空間を $(-\infty, +\infty)$ のコンパクト化と言います。この位相について $[-\infty, +\infty]$ は $(-\infty, +\infty)$ の閉包となります。

ただし、このように書いても $-\infty$, $+\infty$ は、あくまでも、言わば仮想的な点であって、実数との間に自然な順序関係を定めることもできますが、それでも実数ではないことに注意して下さい。

問 **7.2** $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$ のコンパクト化 $[-\infty, +\infty]$ に倣って、$\mathbf{R}^2$ に全ての方向の無限遠点を加えた集合を考え、適当な位相を与えることにより、その位相に関して $\mathbf{R}^2$ の閉包となるようにせよ。

$\mathbf{R}$ を$\mathbf{R}^2 \supset \mathbf{R} \times \{0\}$ (x_1x_2 平面における x_1 軸) と同一視します。

(問4.4)

一方、$\mathbf{R}^2$ の原点$\mathbf{0} = (0, 0)$ を中心とする単位円周

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^1 &:= \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^2 \mid ||\boldsymbol{x}|| = 1\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid {x_1}^2 + {x_2}^2 = 1\} \end{aligned}$$

を考えます。$\mathbf{S}^1$ はコンパクトです。

今、$\mathbf{S}^1$ の北極 $N = (0, 1)$ から$\mathbf{R}$ への立体射影

$$\begin{aligned} \Pi : \mathbf{S}^1 \setminus \{N\} &\to \mathbf{R} \\ (x_1, x_2) &\mapsto \frac{x_1}{1 - x_2} \end{aligned}$$

を考えると、これは $\mathbf{R}^2$ の部分位相空間としての$\mathbf{S}^1 \setminus \{N\}$ から$\mathbf{R}$ への同相写像となっています。

そこで$\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$ に無限遠点を正負区別せず1個だけ加えた集合

$$\mathbf{R} \cup \{\infty\}$$

を考え、同相写像である立体射影$\Pi : \mathbf{S}^1 \setminus \{N\} \to \mathbf{R}$ を北極 N まで拡張した写像

$$\begin{aligned} \hat{\Pi} : \mathbf{S}^1 &\to \mathbf{R} \cup \{\infty\} \\ (x_1, x_2) &\mapsto \begin{cases} \Pi(x_1, x_2) & ((x_1, x_2) \neq (0, 1)) \\ \infty & ((x_1, x_2) = (0, 1)) \end{cases} \end{aligned}$$

が同相写像となるように、$\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ の位相を

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{O}_{\mathbf{R}\cup\{\infty\}} &:= \{\hat{\Pi}(O') \mid O' \in \mathfrak{O}_{\mathbf{S}^1}\} \\
&= \{\hat{\Pi}(O \cap \mathbf{S}^1) \mid O \in \mathfrak{O}_{\mathbf{R}^2}\}
\end{aligned}
$$

と定めれば、$(\mathbf{R}\cup\{\infty\}, \mathfrak{O}_{\mathbf{R}\cup\{\infty\}})$ はコンパクトな位相空間となります。

　この位相空間も $\mathbf{R}$ のコンパクト化の一つですが、特に一点コンパクト化と言います。この位相について $\mathbf{R}\cup\{\infty\}$ は $\mathbf{R}$ の閉包となります。

問 7.3　拡張された立体射影 $\hat{\Pi}$ の逆写像 $\hat{\Pi}^{-1} : \mathbf{R}\cup\{\infty\} \to \mathbf{S}^1$ を具体的な式で表せ。

また、$\mathbf{C}$ を $\mathbf{R}^3 \supset \mathbf{R}^2 \times \{0\}$ ($x_1x_2x_3$ 空間における x_1x_2 平面) と同一視し、$\mathbf{R}^3$ の原点 $\mathbf{0} = (0,0,0)$ を中心とする単位球面

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^2 &:= \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3 \mid ||\boldsymbol{x}|| = 1\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^2 \mid {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 1\} \end{aligned}$$

に対し、その北極 $N = (0,0,1)$ から $\mathbf{C}$ への立体射影

$$\begin{aligned} \Pi : \mathbf{S}^2 \setminus \{N\} &\to \mathbf{C} \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \end{aligned}$$

を考えると、これは $\mathbf{R}^3$ の部分位相空間としての $\mathbf{S}^2 \setminus \{N\}$ から $\mathbf{C}$ ($\mathbf{R}^2$ と同一視した位相が入っています) への同相写像となっています。

以下 $\mathbf{R}$ の場合と全く同様にして、$\mathbf{C}$ の一点コンパクト化 $\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ が得られます。この位相について $\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ は $\mathbf{C}$ の閉包となります。

この $\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ をリーマン球面と呼びます。$\mathbf{C}$ のコンパクト化と言えば、通常はこれを指します。

実はコンパクトでない任意の位相空間に対して、一点コンパクト化を与えることができますが、その詳細は後期の位相数学2に譲ります。