位相数学1＆同演習・講義資料

$\boxed{\text{第10回}}$

(2024年6月19日(水)講義分)

(2024年6月26日(水)改訂版)

§8　距離空間の定義と例

　今回から、一般の「距離空間」の話に入ります。ところで、「距離」と言うとき、この言葉に期待する、当然満たしていてほしい性質にはどのようなものがあるでしょうか？

　§1 でも少しお話しましたように、数学では、任意の集合 X に対し、次の三つの条件を満たす関数 $d : X \times X \to \mathbf{R}$ を、X 上の距離 (関数) と呼びます。

(1)　$d(x, x') \geq 0 \ (x, x' \in X)$

　　$d(x, x') = 0 \Longleftrightarrow x = x'$

(2)　$d(x, x') = d(x', x) \ (x, x' \in X)$

(3)　$d(x, x'') \leq d(x, x') + d(x', x'') \ (x, x', x'' \in X)$

そして、距離が定義された集合 X を**距離空間**と呼び、(X, d) のように組にして表したりします。

(どの距離を用いているか明らかなときは、d は省略して、単に X と書くことが多いのですが、同じ集合上で二つ以上の距離 $d, \widetilde{d}$ などを使い分けるときは、(X, d), $(X, \widetilde{d})$ などと書いて区別します。)

(1) は距離と言う以上は、その値は 0 以上であると言うこと。そして距離が 0 になるのは、自分自身との間に限ること。

(2) は２点間の距離は、どちらから測っても同じこと。

(3) は寄り道が近道にはならないこと。

をそれぞれ表しています。

特に(3)は三角不等式と呼ばれ、通常の所謂ユークリッド距離を備えた平面 $\mathbf{R}^2$ においては、任意の三角形の２辺の長さの和が残る１辺よりも長いことに対応しています。ちなみに、(ユークリッド距離における) 等号成立は、３点が同一直線上にあって、三角形を作らない、要するに文字通り遠回りしない場合です。

これだけの条件を満たす関数は、$\mathbf{R}^2$ (または $\mathbf{R}^n$) 上においても、ユークリッド距離以外に無限通り考えられます。それらを全て距離関数と考え、これらの条件だけから導かれる様々な性質を距離空間の性質として、明らかにして行こうと言うわけです。

とりあえず、例をいろいろ見てみましょう。

一般に $\mathbf{R}^2$ の任意の部分集合 X に対しては、ユークリッド距離(関数)

$$d_2 : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$$
$$d_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') := ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'||_2$$
$$= \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2}$$

(以下 $d_2(\cdot, \cdot)$ で表記、また、ユークリッド・ノルムも別名のL^2 ノルムに因んで $||\cdot||_2$ で表記) を $X \times X$ に定義域を制限することで、自然に距離 $d_2|_{X\times X} : X \times X \to \mathbf{R}$ が定まります。このようにして得られる $(X, d_2|_{X\times X})$ を $(\mathbf{R}^2, d_2)$ の部分距離空間と呼びます。

より一般に、任意の距離空間 (Y, d_Y) に対して、その任意の部分集合 X 上の距離を d_Y の $X \times X$ への制限により定めれば、$(X, d_Y|_{X\times X})$ は (Y, d_Y) の部分距離空間となります。

一方 X によっては、「最短の道のり」或いはより一般に「道のりの下限」を用いて、別の距離を考えることもできます。

例えば X が平面 R^2 上の単位円周

$$\mathbf{S}^1 := \{(x_1, x_2) \mid {x_1}^2 + {x_2}^2 = 1\}$$

のとき、S^1 上の任意の２点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$ の距離を、この２点を結ぶ短い方の円弧の長さによって定めることができます。

具体的に式で表すと、２点を極座標を用いて

$$\boldsymbol{x} = (\cos\theta, \sin\theta), \quad \boldsymbol{x}' = (\cos\theta', \sin\theta')$$

と表す際に、２点の偏角 θ, θ' を

$$|\theta - \theta'| \leq \pi$$

を満たすようにとったときの、$|\theta - \theta'|$ のことです。

この距離は明らかに、２点を結ぶ弦(線分)の長さで定めるユークリッド距離(の制限)

$$2 \sin \frac{|\theta - \theta'|}{2}$$

より長くなりますが、例えば、丸い池の周りを徒歩で移動する場合のように、池の中に入らないことが前提であったり、丸い柱の周りを回る場合のように、そもそも円周の内側が見えないときは、こちらの距離の方が現実的です。

この円弧の長さに限らず、一般に「最短の道のり」或いは「道のりの下限」は三角不等式を満たします。式から証明しようとすると大変そうですが、「２点 x, x'' を結ぶ道で途中 x' を通るもの」全体の集合は、「２点 x, x'' を結ぶ道」全体の集合の部分集合ですから、道のりの最小値や下限については、自動的に大小関係が成立します。従って、最短または下限であることさえ確かめられれば、距離になることが保証されます。

　また実際の町では、平面的に広がっていても、道路が大阪や京都の中心部のように碁盤の目状に敷かれていて、その間に建物や塀で囲まれた庭園があれば、斜めに進むことはできません。そこで通行可能な道路上だけを考えた網目状の集合を考えると、そこでの距離もまた、「最短の道のり」で考えるのが最も自然でしょう。ただし、このように距離を定めるためには、任意の２点間を結ぶ道がある、つまり弧状連結であることが必要です。

円周のような曲線では、２点間を結ぶ道は自然と制約されますが、３次元空間 $\mathbf{R}^3$ 内上の単位球面

$$\mathbf{S}^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \mid {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 1\}$$

においては、任意の２点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$ を結ぶ道は無限通り選べます。しかし、その中で最短のものと言うと、中心を含む平面で切った切り口に現れる大円弧であり、２点間の距離も、この大円弧の長さによって測られます。地球上を移動するとき、地中深く掘り進むことはありませんから、距離としては、こちらの方が実用性も高いでしょう。

ちなみに任意の距離空間に対し、その(自由に動かした) 2 点間の距離の上限を直径と呼びます。円弧の長さで定める距離で測ると、単位円周の直径は 2 ではなく、π と言うことになります。単位球面 S^2 においても、大円弧の長さによる距離で測った直径は、やはり π になります。

この意味では、単位円や単位球の直径が 2 というときの円や球は、円周や球面ではなく、その内部も含んでいる(閉)円板や(閉)球体のことを指しているのが大前提と言うことになります。

ただ、ここで注意して欲しいことは、このようにして定めた円周や球面上の距離は、$\mathbf{R}^2$ や $\mathbf{R}^3$ のユークリッド距離をそのまま制限したものではないにせよ、元のユークリッド距離があることは大前提で、それを用いて初めて可能な線積分を用いて、円周や球面上の C^1 級曲線の長さを測ることで定義されると言う意味では、やはり独立して定義されたものではないと言うことです。

では、既に与えられている距離とは独立に与えられる距離や、或いは、元々距離が無い処に一から与えられる距離には、どのようなものがあるでしょうか？

その最も極端な例が、(空でない)任意の集合 X に対して定義される

$$d(x,y) := 1 \qquad (x \neq y)$$

で、離散距離と呼ばれています。

問 8.1　この関数 d が、距離の３条件を満たす(つまり、「離散距離」が距離である) ことを示せ。

$\mathbf{R}^2$ 上にこの距離を定めた場合、、ユークリッド距離ではどんなに近い点どうしでも、距離 1 は離れている一方で、どんなに遠い点どうしでも、距離 1 しか離れていないと見なすことになります。

このような極端な例は横におき、一旦もう少しユークリッド距離に近い例に話を戻しましょう。

　一般に、ノルム(絶対値)が与えられているベクトル空間をノルム空間と呼びます。ここでベクトル空間 V 上のノルムとは、V 上で定義された関数 $||\cdot|| : V \to \mathbf{R}$ で、

(1)　$||\boldsymbol{v}|| \geq 0 \ (\boldsymbol{v} \in V)$

　$||\boldsymbol{v}|| = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$

(2)　$||a\boldsymbol{v}|| = |a| \times ||\boldsymbol{v}|| \ (\boldsymbol{v} \in V; a \in \mathbf{R})$

(3)　$||\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}'|| \leq ||\boldsymbol{v}|| + ||\boldsymbol{v}'|| \ (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in V)$

を満たすもののことです。

　ノルム空間 $(V, ||\cdot||)$ においては、２つのベクトルの差のノルムから、$\mathbf{R}^n$ の場合同様にして、自然に距離

$$d(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}') := ||\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}'|| \quad (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in V)$$

が定まります。

実際、ノルムの条件 (1) より、

$$d(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}') = ||\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}'|| \geq 0 \quad (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in V)$$

$$d(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}') = ||\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}'|| = 0 \iff \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}' = \mathbf{0} \iff \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}'$$

ノルムの条件 (2) より、

$$\begin{aligned} d(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}') &= ||\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}'|| \ = \ ||(-1)(\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v})|| \\ &= |(-1)| \cdot ||\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}|| \ = \ ||\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}|| \\ &= d(\boldsymbol{v}', \boldsymbol{v}) \quad (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in V) \end{aligned}$$

ノルムの条件 (3) より、

$$\begin{aligned} d(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}'') &= ||\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}''|| \ = \ ||(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}') + (\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}'')|| \\ &\leq ||\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}'|| + ||\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}''|| \\ &= d(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}') + d(\boldsymbol{v}', \boldsymbol{v}'') \quad (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}', \boldsymbol{v}'' \in V) \end{aligned}$$

つまり、この d は自然に距離の３条件を満たしますから、(V, d) は距離空間になります。

一方、内積が与えられているベクトル空間は内積空間と呼ばれます。ここでベクトル空間 V 上の内積とは、$V \times V$ 上で定義された関数 $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbf{R}$ で、

(1) $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \geq 0 \ (\boldsymbol{v} \in V)$

$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$

(2) $\langle \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}', \boldsymbol{v}'' \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}'' \rangle + \langle \boldsymbol{v}', \boldsymbol{v}'' \rangle \ (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}', \boldsymbol{v}'' \in V)$

$\langle a\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \rangle = a\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \rangle \ (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in V; a \in \mathbf{R})$

(3) $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \rangle = \langle \boldsymbol{v}', \boldsymbol{v} \rangle \ (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in V)$

を満たすもののことです。

内積空間 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ においては、自分自身との内積の平方根によって自動的にノルム

$$||\boldsymbol{v}|| := \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle^{1/2} \quad (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in V)$$

が与えられます。

実際、内積の条件 (1) より、

$$||\boldsymbol{v}|| = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle^{1/2} \geq 0 \quad (\boldsymbol{v} \in V)$$
$$||\boldsymbol{v}|| = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle^{1/2} = 0 \iff \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$$

内積の条件 (2) と (3) ((3) は3番目の $=$ のため) より、

$$\begin{aligned} ||a\boldsymbol{v}|| &= \langle a\boldsymbol{v}, a\boldsymbol{v} \rangle^{1/2} \ = \ (a\langle \boldsymbol{v}, a\boldsymbol{v} \rangle)^{1/2} \\ &= (a\langle a\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle)^{1/2} \ = \ (a^2\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle)^{1/2} \\ &= |a|\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle^{1/2} \ = \ |a| \cdot ||\boldsymbol{v}|| \quad (\boldsymbol{v} \in V; a \in \mathbf{R}) \end{aligned}$$

内積の (2) と (3) より、

$$\begin{aligned}||\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}'|| &= \langle \boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}', \boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}'\rangle^{1/2} \\ &\le \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle^{1/2} + \langle \boldsymbol{v}', \boldsymbol{v}'\rangle^{1/2} \\ &= ||\boldsymbol{v}|| + ||\boldsymbol{v}'|| \quad (\boldsymbol{v} \in V; a \in \mathbf{R})\end{aligned}$$

(この証明は問13.1) つまり、この $||\cdot||$ は自然にノルムの３条件を満たしますから、これから自然に距離

$$d(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}') := \langle \boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}', \boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}'\rangle^{1/2} \quad (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in V)$$

が定まり、(V, d) は、やはり距離空間になります。

R^2 (または R^n)上にも、ユークリッド内積から自然に定義されるユークリッド・ノルムの他に、無限通りのノルムが存在し、それに対応する距離もまた無限通りです。

たとえば平面 R^2 上で、現実の町ではありえませんが、道路が限り無く細かい網目のように敷かれていて、斜めに進むことはできない(碁盤の目とは違いますが、縦横にしか進めない) ような状況を考えてみましょう。このとき、R^2 の任意の２点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ と $\boldsymbol{x}' = (x_1', x_2')$ の道のりは、

$$d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = |x_1 - x_1'| + |x_2 - x_2'|$$

で与えられますが、実はこれは**マンハッタン距離**と呼ばれる距離になります。

問8.2　この関数 d_1 が、距離の３条件を満たす(つまり、「マンハッタン距離」が距離である) ことを示せ。

実は、マンハッタン距離はL^1 ノルムと呼ばれる、ユークリッド・ノルムとは別のノルム

$$||\boldsymbol{x}||_1 = |x_1| + |x_2|$$

$$(\mathbf{R}^n \text{ では } ||\boldsymbol{x}||_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|)$$

から定まる距離になっています。

マンハッタン距離に関する「円周」(ある点から一定の距離だけ離れた点の集合) は45度傾いた正方形の外周「◇」($n = 3$ の場合の「球面」は正八面体の表面) になり、ユークリッド距離の場合とは明らかに異なりますが、それでもこの距離は、離散距離ほどかけ離れたものではありません。

実際、マンハッタン距離とユークリッド距離の間には、不等式

$$\begin{aligned}\sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2} \\ \le |x_1 - x_1'| + |x_2 - x_2'| \\ \le \sqrt{2}\sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2}\end{aligned}$$

すなわち

$$d_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \le d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \le \sqrt{2}\, d_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$$

が成り立ちます。

問8.3　$\mathbf{R}^n$ の場合に、これに対応する不等式を求めよ。

一般に、このような(比が正定数で上下から抑えられる) 関係にある二つの距離を同値な距離と呼びます。同値な距離どうしは同じ位相を定めるため、マンハッタン距離に関して考えた連続性は、ユークリッド距離で考えた連続性と一致します。このことについては、次回もう少し詳しく触れます。

平面 $\mathbf{R}^2$ 上ではまた、任意の２点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ と $\boldsymbol{x}' = (x_1', x_2')$ に対し、

$$d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \max\{|x_1 - x_1'|, |x_2 - x_2'|\}$$

により、チェビシェフ距離と呼ばれる距離も定めることができます。

問8.4　この関数 d_∞ が、距離の３条件を満たす(つまり、「チェビシェフ距離」が距離である) ことを示せ。

チェビシェフ距離は L^∞ ノルム(または最大値ノルム)と呼ばれる、また別のノルム

$$||\boldsymbol{x}||_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

$$(\mathbf{R}^n \text{ では } ||\boldsymbol{x}||_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\})$$

から定まる距離になっています。

チェビシェフ距離に関する「円周」は、今度は傾いていない正方形の外周「□」($n=3$ の場合の「球面」は立方体の表面) になります。

チェビシェフ距離とユークリッド距離の間にも、不等式

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}}&\sqrt{(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2}\\&\le \max\{|x_1-x_1'|,|x_2-x_2'|\}\\&\le \sqrt{(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2}\end{aligned}$$

すなわち

$$\frac{1}{\sqrt{2}}d_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\le d_\infty(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\le d_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$$

が成り立ち、やはり同値な距離になります。

問 8.5　R^n の場合に、これに対応する不等式を求めよ。

従って、チェビシェフ距離で考えた連続性もまた、ユークリッド距離で考えた連続性と一致します。

より一般に、二つの距離空間 (X, d_X) と (Y, d_Y) に対して、直積集合 $X \times Y$ 上に、

$$
\begin{aligned}
d_1((x,y),(x',y')) &:= d_X(x,x') + d_Y(y,y'), \\
d_2((x,y),(x',y')) &:= \sqrt{d_X(x,x')^2 + d_Y(y,y')^2}, \\
d_\infty((x,y),(x',y')) &:= \max\{d_X(x,x'), d_Y(y,y')\}
\end{aligned}
$$

により、それぞれ距離を定めることができます。

特に $d_1(\cdot,\cdot)$ は直積距離と呼ばれます。

(これらの関数が距離の３条件を満たすことは、マンハッタン距離、ユークリッド距離、チェビシェフ距離の場合とほぼ同様の計算で、確かめられます。)

距離空間 (X, d_X) から (Y, d_Y) への写像 $f : X \to Y$ が

$$d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x') \quad (x, x' \in X)$$

を満たすとき、等長写像であると言います。

(X, d_X) が (Y, d_Y) の部分距離空間、すなわち $X \subset Y$ かつ $d_X = d_Y|_{X \times X}$ のとき、包含写像 $\iota : X \to Y$ は等長写像です。

(X, d_X) から (Y, d_Y) への全単射な等長写像 $f : X \to Y$ が存在するとき、逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ ももちろん等長写像です。このとき、二つの距離空間 (X, d_X) と (Y, d_Y) は等長であると言います。

等長な距離空間はしばしば同一視されます。等長写像 $f : X \to Y$ があるとき、終集合を f の像 $f(X)$ に制限した写像は全単射ですから、X と $f(X)$ は等長であり、上の意味で同一視され、X は Y の部分距離空間と見なされます。この同一視の下では、f は包含写像の役割を果たすことになります。

一方、同じ X であっても、異なる距離 $d_X, \widetilde{d}_X$ を与えた二つの距離空間 (X, d_X) と $(X, \widetilde{d}_X)$ において、$d_X, \widetilde{d}_X$ がたとえ同値な距離であっても、少なくとも恒等写像 $\mathrm{id}_X : (X, d_X) \to (X, \widetilde{d}_X)$ は等長写像ではありません。

しかし、写像をうまくとれば、等長となる可能性はあります。

問 8.6　任意の $c > 0$ に対して、$(\mathbf{R}^n, d_2)$ と $(\mathbf{R}^n, c\, d_2)$ は等長であることを示せ。

$\boxed{\text{追加の問題}}$

問8.7　$p \geq 1$ とする。$\mathrm{R}^n \ni \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ に対し、

$$||\boldsymbol{x}||_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

と定義すると、$||\cdot||_p$ は R^n 上のノルムとなる。これを L^p ノルムと呼ぶ。

$$\lim_{p\to\infty} ||\boldsymbol{x}||_p = ||\boldsymbol{x}||_\infty \left(= \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \right)$$

を示せ。

問8.8 (X, d_X), (Y, d_Y) は共に距離空間で、$X \cap Y = \emptyset$ とする。$Z := X \cup Y$ とおく。$x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ を一つずつ選び固定し、

$$\begin{cases} d_Z(x, x') := d_X(x, x') & (x, x' \in X) \\ d_Z(y, y') := d_Y(y, y') & (y, y' \in Y) \\ d_Z(x, y) := d_X(x, x_0) + d_Y(y, y_0) + 1 & (x \in X; y \in Y) \end{cases}$$

と定義すると、d_Z は Z 上の距離となることを示せ。

問8.9 (X, d) は距離空間とする。

$$\tilde{d}(x, x') := \begin{cases} d(x, x') & (d(x, x') \in \mathbf{N} \cup \{0\}) \\ [d(x, x')] + 1 & (d(x, x') \notin \mathbf{N} \cup \{0\}) \end{cases}$$

と定義すると、$\tilde{d}$ もまた X 上の距離となることを示せ。

問 8.10　X は R^2 内の閉円板全体の集合とする。すなわち

$$X := \left\{ \overline{B(\boldsymbol{p}, r)} \;\middle|\; \boldsymbol{p} \in \mathbf{R}^2, r > 0 \right\}$$

である。$d\left(\overline{B(\boldsymbol{p}, r)}, \overline{B(\boldsymbol{p}', r')}\right)$ を

$$\overline{B(\boldsymbol{p}, r+\epsilon)} \supset \overline{B(\boldsymbol{p}', r')} \text{ かつ } \overline{B(\boldsymbol{p}, r)} \subset \overline{B(\boldsymbol{p}', r'+\epsilon)}$$

をみたす最小の ϵ とすると、d は X 上の距離となることを示せ。

問 8.11　X は R^2 内の単純閉曲線で囲まれた図形全体の集合とする。但し、これらの図形は全て、その内部と境界を含む閉集合とする。$A, B \in X$ に対し、$d(A, B)$ を

$$A \setminus B \text{ の面積} + B \setminus A \text{ の面積}$$

により定義すると、d は X 上の距離となることを示せ。