位相数学1＆同演習・講義資料

$\boxed{\text{第11回}}$

(2024年6月26日(水)講義分)

§9　距離空間の位相と写像の連続性

一般に距離空間 (X, d) における位相に関する用語の定義は、$\mathbf{R}^n$ の場合と同じなのですが、おさらいも兼ねて、一通り列挙しておきましょう。

($(*)$ は初出です。他の用語に比べて使用頻度は低いのですが、一応ご紹介しておきます。)

$X \ni a$ のϵ 近傍(半径 ϵ の開円板・開球体の一般化)$(\epsilon > 0)$：

$$B(a;\epsilon) := \{x \in X \mid d(x,a) < \epsilon\}$$

$X \ni a$ が $X \supset Y$ の内点($X \supset Y$ が a の近傍(ある ϵ 近傍を含む))：

$$\exists \epsilon > 0 \text{ s.t. } B(a;\epsilon) \subset Y$$

$X \supset Y$ の内部(開核) (内点の全体)：

$$Y^i := \{x \in X \mid x \ : \ Y\text{の内点}\}(\subset Y)$$

$X \supset Y$ が開集合(各点が内点)：

$$Y \subset Y^i \quad (\Longleftrightarrow Y^i = Y\ )$$

$X \ni a$ が $X \supset Y$ の外点(補集合の内点)：

$$\exists \epsilon > 0 \text{ s.t. } B(a;\epsilon) \subset Y^c (:= X \setminus Y) \quad (\Longleftrightarrow a \in (Y^c)^i\ )$$

$X \supset Y$ の外部(補集合の内部)：

$$Y^e := \{x \in X \mid x\ :\ Y \text{の外点}\}\ (\ = (Y^c)^i\ )$$

$X \ni a$ が $X \supset Y$ の境界点(内点でも外点でもない点)：

$$\forall \epsilon > 0, B(a;\epsilon) \cap Y \neq \emptyset \text{ かつ } B(a;\epsilon) \cap Y^c \neq \emptyset \quad (\Longleftrightarrow a \notin Y^i \cup Y^e\ )$$

$X \supset Y$ の境界(内部と外部の和集合の補集合)：

$$\partial Y := \{x \in X \mid x\ :\ Y \text{の境界点}\}\ (\ = (Y^i \cup Y^e)^c\ )$$

$(*)$ $X \ni a$ が $X \supset Y$ の触点(内点または境界点＝外点でない点)：

$$\forall \epsilon > 0, B(a;\epsilon) \cap Y \neq \emptyset \quad (\Longleftrightarrow a \in Y^i \cup \partial Y \Longleftrightarrow a \notin Y^e)$$

$X \supset Y$ の閉包(内部と境界の和集合＝外部の補集合)：

$$\overline{Y} := \{x \in X \mid x \ : \ Y\text{の触点}\} \ (= Y^i \cup \partial Y \ = (Y^e)^c \ ) \ (\supset Y)$$

$X \supset Y$ が閉集合(境界点を全て含む):

$$\partial Y \subset Y \quad (\Longleftrightarrow \overline{Y} = Y)$$

$X \ni a$ が Y の集積点($Y \setminus \{a\}$ の触点)：

$$\forall \epsilon > 0, B(a;\epsilon) \cap (Y \setminus \{a\}) \neq \emptyset \quad (\Longleftrightarrow a \in \overline{Y \setminus \{a\}}\ )$$

$(*)$ $X \supset Y$ の導集合(集積点の全体)：

$$Y^d := \{x \in X \mid x \ : \ Y \text{の集積点}\}$$

$X \ni a$ が Y の孤立点(集積点でない Y の点)：

$$\exists \epsilon > 0 \text{ s.t. } B(a;\epsilon) \cap Y = \{a\} \quad (\Longleftrightarrow a \in Y \setminus Y^d\ )$$

$X \supset Y$ の閉包(自分自身と導集合の和集合)：

$$\overline{Y} = Y \cup Y^d$$

$X \supset Y$ が閉集合(集積点を全て含む)：

$$Y^d \subset Y$$

2^X ： X のべき集合

X の位相(開集合系)：

$$\mathfrak{O} := \{O \in 2^X \mid O \ : \ \text{開集合}\}$$

X の閉集合系：

$$\mathfrak{A} := \{A \in 2^X \mid A \ : \ \text{閉集合}\}$$

$(X, \mathfrak{O}_X)$, $(Y, \mathfrak{O}_Y)$ ：位相空間

$f : X \to Y$ が連続写像：

$$\forall O \in \mathfrak{O}_Y, f^{-1}(O) \in \mathfrak{O}_X$$

$f : X \to Y$ が開写像：

$$\forall O' \in \mathfrak{O}_X, f(O') \in \mathfrak{O}_Y$$

$f : X \to Y$ が同相写像：

$$f \;:\; \text{全単射かつ連続写像かつ開写像}$$

$(X, \mathfrak{O}_X)$ と $(Y, \mathfrak{O}_Y)$ が同相：

$$\exists f : X \to Y \;:\; \text{同相写像}$$

さて、集合 X 上に二つの位相$\mathfrak{O}$, $\widetilde{\mathfrak{O}}$ が与えられていたとします。

これらの間に包含関係($\mathfrak{O} \supset \widetilde{\mathfrak{O}}$ または$\mathfrak{O} \subset \widetilde{\mathfrak{O}}$) によって順序関係を定めるとき、小さい方(含まれる方) を弱い位相、大きい方(含む方) を強い位相と言います。

恒等写像

$$\mathrm{id}_X : (X, \mathfrak{O}) \to (X, \widetilde{\mathfrak{O}})$$

は、

(1)　$\mathfrak{O} \supset \widetilde{\mathfrak{O}}$ (定義域の方が強い) のとき連続写像

(2)　$\mathfrak{O} \subset \widetilde{\mathfrak{O}}$ (終集合の方が強い) のとき開写像

に、それぞれなります。

最も強い位相は、全ての部分集合を開集合とする離散位相で、これが定義域に与えられた写像($\mathfrak{O} = 2^X$) は全て連続になります。(定義域が各点毎にばらけているので、そもそもつながり具合を考えなくてよいと言う意味合いです。)

一方、最も弱い位相は、自分自身と空集合のみを開集合とする位相で、密着位相とよばれます。これが終集合に与えられた写像($\widetilde{\mathfrak{O}} = \{X, \emptyset\}$) は全て連続になります。(終集合の全ての点が固まっているので、全てつながっていると考えると言う意味合いです。距離空間とは無縁なので、この講義ではあまり扱いません。)

　恒等写像

$$\mathrm{id}_X : (X, \mathfrak{O}) \to (X, \widetilde{\mathfrak{O}})$$

が同相写像であることは、二つの位相(開集合系)が一致する、すなわち

$$\mathfrak{O} = \widetilde{\mathfrak{O}}$$

が成り立つことと同値です。

　今、位相$\mathfrak{O}$, $\widetilde{\mathfrak{O}}$ を、それぞれ、X 上の距離d, $\widetilde{d}$ から定まるものとします。

　これら二つの距離が同値、すなわち、

$$\begin{aligned} &\exists c_1 > 0, \exists c_2 > 0 \text{ s.t.} \\ &c_1 d(x, x') \leq \widetilde{d}(x, x') \leq c_2 d(x, x') \quad (x, x' \in X) \end{aligned} \tag{9.1}$$

を満たすとき、これらは同じ位相を定めます。

実際、ここで任意の$a \in X$ と $\epsilon > 0$ に対して、距離 d, $\widetilde{d}$ に関するa の ϵ 近傍をそれぞれ$B(a;\epsilon)$, $\widetilde{B}(a;\epsilon)$ で表すことにすると、不等式 (9.1) より

$$B\left(a;\frac{\epsilon}{c_1}\right) \supset \widetilde{B}(a;\epsilon) \supset B\left(a;\frac{\epsilon}{c_2}\right)$$

が成り立ちますから、任意の $Y \subset X$ と任意の $a \in X$ に対し、a が距離 d に関して Y の内点であることは、距離 $\widetilde{d}$ に関して Y の内点であることと同値になるからです。

しかし、距離が同値であることは、同じ位相を定めるための必要条件ではありません。

例えば、ユークリッド距離 d_2 と離散距離の小さい方を選んだ

$$d'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') := \min\{d_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'), 1\}$$

もまた $\mathbf{R}^n$ 上の距離になります。

問 **9.1** この関数 d' が、距離の３条件を満たすことを示せ。

(任意の二つの距離 $d, \widetilde{d}$ に対して、$\min\{d, \widetilde{d}\}$ が距離になるとは限りません。)

d' は、前回の d_1 や d_∞ のように、d_2 との間で不等式 (9.1) を満たしませんが、d_2 と同じ位相を定めます。これは ϵ-δ 論法で連続性を考える際に、$\epsilon > 0$ や $\delta > 0$ が「十分小さい」場合について確かめればよいことに関連しています。

問 **9.2** このこと(上の赤字の主張) を示せ。

一方、ユークリッド距離 d_2 と離散距離の大きい方を選んだ

$$d''(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') := \begin{cases} \max\{d_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'),1\} & (\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{x}') \\ 0 & (\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}') \end{cases}$$

もまた $\mathbf{R}^n$ 上の距離になります。

問 9.3　この関数 d'' が、距離の３条件を満たすことを示せ。

(任意の二つの距離 d, $\widetilde{d}$ に対して、$\max\{d,\widetilde{d}\}$ もまた距離になります。ただし、これはチェビシェフ距離そのもののことではありません。)

d'' は、離散距離 との間で不等式 (9.1) を満たしませんが、離散位相を定めます。

問 9.4　このこと(上の赤字の主張) を示せ。

§2 で、$\mathbf{R}^n$ の通常の位相における任意の開集合 O は、開区間・開円板・開球体たちの和集合として表せることについてお話しました。このことは、一般の距離空間においても、全く同様に成り立ちます。

実際、距離空間 (X, d) の任意の開集合 O は、O の各点 a に対し、$B(a;\epsilon) \subset O$ を満たす $\epsilon > 0$ を一つ選び、ϵ_a と表すことにすると、

$$O = \bigcup_{a \in O} B(a; \epsilon_a)$$

のように、やはり ϵ 近傍たちの和集合として表せます。

　より一般に$\mathfrak{O} \supset \mathfrak{B}$ において、任意の $O \in \mathfrak{O}$ に対し、$\mathfrak{B}$ のある部分集合系$(O_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が存在して

$$O = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \tag{9.2}$$

と表せるとき、$\mathfrak{B}$ を位相 $\mathfrak{O}$ の基底または開基と呼びます。

　距離 d から定まる位相 $\mathfrak{O}$ において、d に関する ϵ 近傍全体

$$\{B(x,\epsilon) \mid x \in X, \epsilon > 0\}$$

は、$\mathfrak{O}$ の基底ですが、別の距離 $\widetilde{d}$ が d と同値ならば、$\widetilde{d}$ に関する ϵ 近傍全体もまた$\mathfrak{O}$ の基底となります。

　従って、例えば $\mathbf{R}^2$ において、開円板全体の代わりに開正方形領域全体をとっても、通常の位相の基底となります。

距離空間の間の写像 $f : X \to Y$ が連続であるとは、Y の任意の開集合 O の f による逆像 $f^{-1}(O)$ が、X の開集合であることでしたが、f が連続であることを確かめるには、Y の全ての開集合について確かめる必要はありません。

実際、O が (9.2) のように表せるとき、

$$f^{-1}(O) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(O_\lambda)$$

より、任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $f^{-1}(O_\lambda)$ が開集合でさえあれば、$f^{-1}(O)$ も開集合になりますから、基底 $\mathfrak{B}_Y$ をなす Y の開集合の逆像が X の開集合であること、すなわち

$$\forall O \in \mathfrak{B}_Y, f^{-1}(O) \in \mathfrak{O}_X$$

さえ確かめれば十分です。

ここまで、定義域全体における連続性について、先に見て来ましたが、各点における連続性も $\mathbf{R}^n$ の場合と全く同様に扱えます。

すなわち、$f : X \to Y$ が $a \in X$ で連続であるとは、$f(a) \in Y$ の任意の近傍 U の f による逆像 $f^{-1}(U)$ が、a の近傍であることと同値であり、これを連続性の定義としても構いません。

一般に、位相空間 $(X, \mathfrak{O})$ において、$a \in X$ の近傍全体の集合を a の近傍系と呼び、$\mathfrak{U}(a)$ などと表します。

X, Y それぞれにおける近傍系を $\mathfrak{U}_X, \mathfrak{U}_Y$ で表せば、f が a で連続であることは、

$$\forall U \in \mathfrak{U}_Y(f(a)), f^{-1}(U) \in \mathfrak{U}_X(a)$$

となります。

$\mathfrak{U}(a) \supset \mathfrak{U}^*(a)$ において、

$$\forall U \in \mathfrak{U}(a), \exists U^* \in \mathfrak{U}^*(a) \text{ s.t. } U^* \subset U$$

が成り立つとき、$\mathfrak{U}^*(a)$ をa の基本近傍系と呼びます。

距離 d から定まる位相 $\mathfrak{O}$ において、d に関する $a \in X$ の ϵ 近傍全体

$$\{B(a, \epsilon) \mid \epsilon > 0\}$$

は、a の基本近傍系ですが、別の距離 $\widetilde{d}$ が d と同値ならば、$\widetilde{d}$ に関する a の ϵ 近傍全体もまたa の基本近傍系となります。

各点での連続性を確かめる場合にも、全ての近傍について確かめる必要はありません。その際、基底の代わりを務めるのが、この基本近傍系です。

実際、$f(a)$ の近傍 U に対し、$U^* \subset U$ を満たす $U^* \in \mathfrak{U}_Y^*(f(a))$ をとれば、$f^{-1}(U^*) \subset f^{-1}(U)$ より、任意の $U^* \in \mathfrak{U}_Y^*(f(a))$ に対し $f^{-1}(U^*)$ が a の近傍でさえあれば、$f^{-1}(U)$ も a の近傍になりますから、f の a における連続性を確かめるには、基本近傍系 $\mathfrak{U}_Y^*(f(a))$ をなす $f(a)$ の近傍の逆像が a の近傍であること、すなわち

$$\forall U^* \in \mathfrak{U}_Y^*(f(a)), f^{-1}(U^*) \in \mathfrak{U}_X(a)$$

さえ確かめれば十分です。

　なお、位相の基底や基本近傍系の典型的な例として、上に挙げた ϵ 近傍の集合ですが、ϵ の値として、正の実数全てを選ばなくても、0 に収束する狭義単調減少数列 $\{\epsilon_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ を選び、

$$\{B(x,\epsilon_k) \mid x \in X, k \in \mathbf{N}\}$$

や

$$\{B(a,\epsilon_k) \mid k \in \mathbf{N}\}$$

を考えても、位相の基底や基本近傍系となります。

問9.5　このことを示せ。

一般の距離空間についても、$\mathbf{R}^n$ の部分集合の場合と全く同様に、連結性(開かつ閉な部分集合は自分自身と空集合に限る)やコンパクト性(任意の開被覆は有限部分被覆を含む)を定義することができ、これらの性質は同相な位相空間どうしで保たれます。

しかし、一般の距離空間においては、$\mathbf{R}^n$ の部分集合の場合と違って、有界閉集合だからと言って、コンパクトになるとは限りません。(有界性は位相的性質ではないからです。)

例えば、無限集合に離散距離を入れた距離空間は、それ自身、有界閉集合ですが、コンパクトではありません。一方 $\mathbf{R}^n$ の有界閉集合で、相対位相が離散位相になるものは、有限集合なので、上のような例は、$\mathbf{R}^n$ の部分集合としては実現できません。

問**9.6**　このことを示せ。