位相数学1＆同演習・講義資料

$\boxed{\text{第12回}}$

(2024年7月3日(水)講義分)

§9　距離空間の位相と写像の連続性(続き)

追加の問題

問 9.7　二つの距離 $d, \widetilde{d}$ で $\min\{d, \widetilde{d}\}$ が距離にならない例を挙げよ。

$\boxed{\text{補足１}}$

　これまで、n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ またはその部分集合への写像の連続性は、各成分毎に確かめればよいことを認めて来ました。この事実を厳密に説明するには、直積位相を用いるのが最適です。主に位相数学2で扱う内容ですが、ここで少しだけ紹介しておきましょう。

　$(X, \mathfrak{O}_X)$, $(Y, \mathfrak{O}_Y)$ は位相空間とします。X の元と Y の元の組全体の集合を、X と Y の直積と言い、$X \times Y$ で表します。すなわち

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

です。

$X \times Y$ の各元に対し、X の元(第 1 成分とも言います) を対応させる写像を、X への**射影**、Y の元(第 2 成分とも言います) を対応させる写像を、Y への射影と言い、ここでは、それぞれp_X, p_Y で表すことにします。すなわち

$$
\begin{aligned}
p_X : X \times Y &\to X \\
(x, y) &\mapsto x \\
p_Y : X \times Y &\to Y \\
(x, y) &\mapsto y
\end{aligned}
$$

です。

直積 $X \times Y$ には、通常、二つの射影 p_X, p_Y が共に連続となるような最も弱い位相(すなわち開集合として最少限必要な部分集合を集めたもの) を与えます。そのような位相を $\mathfrak{O}_{X\times Y}$ で表すことにします。

ここで、任意の $O_X \in \mathfrak{O}_X$ に対し ${p_X}^{-1}(O_X) = O_X \times Y$, 任意の $O_Y \in \mathfrak{O}_Y$ に対し ${p_Y}^{-1}(O_Y) = X \times O_Y$ ですから、

$$O_X \times Y, X \times O_Y \in \mathfrak{O}_{X\times Y}$$

より

$$O_X \times O_Y = (O_X \times Y) \cap (X \times O_Y) \in \mathfrak{O}_{X\times Y}$$

が成り立ち、これら(すなわち X, Y それぞれの開集合の直積たち) を全て含むような最も弱い位相が $\mathfrak{O}_{X\times Y}$ と言うことになります。

この位相を$\mathfrak{O}_X$ と $\mathfrak{O}_Y$ の直積位相と言い、$(X \times Y, \mathfrak{O}_{X\times Y})$ を $(X, \mathfrak{O}_X)$ と$(Y, \mathfrak{O}_Y)$ の直積位相空間と言います。

今、$\mathfrak{O}_X$ と $\mathfrak{O}_Y$ それぞれの基底$\mathfrak{B}_X$ と $\mathfrak{B}_Y$ を一つずつ選び、

$$\mathfrak{B}_{X\times Y} = \{O_X \times O_Y \mid O_X \in \mathfrak{B}_X, O_Y \in \mathfrak{B}_Y\}$$

とおけば、これが $\mathfrak{O}_{X\times Y}$ の基底になります。

問9.8　このことを示せ。

　ところで、ここで示したかったことは、一般に位相空間 $(W, \mathfrak{O}_W)$ から $(X \times Y, \mathfrak{O}_{X\times Y})$ への写像

$$\begin{aligned} f : W &\to X \times Y \\ w &\mapsto (f_X(w), f_Y(w)) \end{aligned}$$

が連続写像となるためには、$f_X : W \to X$, $f_Y : W \to Y$ が共に連続写像であることが必要十分だと言うことです。

　実際、$f_X = p_X \circ f$, $f_Y = p_Y \circ f$ ですから、射影 p_X, p_Y の連続性より、このことが必要であることは直ちに従います。

一方一般に、任意の $O_X \times O_Y \in \mathfrak{B}_{X\times Y}$ に対し

$$f^{-1}(O_X \times O_Y) = {f_X}^{-1}(O_X) \cap {f_Y}^{-1}(O_Y)$$

ですから、f_X, f_Y が共に連続ならば、${f_X}^{-1}(O_X), {f_Y}^{-1}(O_Y) \in \mathfrak{O}_W$ より $f^{-1}(O_X \times O_Y) \in \mathfrak{O}_W$ が従い、f も連続であることがわかります。(基底について確認すれば十分と言う事実を用いました。)

特に $X = Y = \mathbf{R}$ のとき、$X \times Y = \mathbf{R}^2$ ですが、ここで導入した直積位相の定め方によれば、(傾いていない) 長方形の内部たちが基底となります。実は正方形の内部たちに制限しても基底となるのですが、これは L^∞ 距離 d_∞ の ϵ 近傍たちに他なりません。一方、既に見たように、d_∞ と通常のユークリッド距離 d_2 は互いに同値で、同じ位相を定めますから、写像の連続性は成分毎に確かめればよいと言う主張が、通常の位相について保証されます。

これは、一般の $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$ についても、全く同様です。

$\boxed{\text{補足２}}$

　この講義や演習において、2 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^2$ またはその部分集合の間で写像を定義する問題をしばしば扱っていますが、その中で極座標 (r, θ) を用いて考えると分かり易い問題がいくつかありました。しかし、極座標を用いた表示のままでは、連続性等の議論が不十分になることがあります。

　それは、(r, θ) が属する集合が、厳密には $[0, \infty) \times [0, 2\pi) (\subset \mathbf{R}^2)$ と言う、元の $\mathbf{R}^2$ とは別の集合であり、極座標を用いて表すと言うことは、実は本来表したい写像と極座標を与える写像またはその逆写像との合成写像を考えていることによるものです。

ここで曖昧さが生じるのは、極座標を与える写像

$$\mathbf{R}^2 \to [0,\infty) \times [0, 2\pi)$$
$$(x,y) \mapsto (r,\theta) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x}\text{など}\right)$$

或いはその逆写像

$$[0,\infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbf{R}^2$$
$$(r,\theta) \mapsto (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

が、(原点 $(x,y)=(0,0)$ を除いて考えたとしても) 同相写像ではないためです。

この議論を厳密なものとするには、商位相を用いるのが最適です。これも主に位相数学2で扱う内容ですが、(そして一般の距離空間とは話が少しそれますが、) ここで少しだけ紹介しておきましょう。(詳細は後期の講義に譲ります。)

$(X, \mathfrak{O}_X)$ を位相空間とし、$\sim$ は X 上で定義された同値関係とします。X の任意の元 x に対し、この同値関係による同値類を $[x]$ で、その全体を $X/\sim$ で表します。すなわち

$$[x] = \{x' \in X \mid x' \sim x\}$$
$$X/\sim = \{[x] \mid x \in X\}$$

です。$X/\sim$ は商集合と呼ばれます。このとき、自然に定義される写像

$$\pi_X : X \to X/\sim$$
$$x \mapsto [x]$$

を商写像と呼びます。

この段階ではまだ、商集合 $X/\sim$ には位相は与えられていませんが、最も自然な位相の定め方としては、商写像 π_X が連続となるような最も強い位相(すなわち開集合として取り得る部分集合を最大限集めたもの) を考えるのが適当でしょう。(今回は終集合の位相なので、先程とは考え方が逆です。) すなわち

$$\mathfrak{O}_{X/\sim} = \{\tilde{O} \mid \tilde{O} \subset X/\sim, {\pi_X}^{-1}(\tilde{O}) \in \mathfrak{O}_X\}$$

です。

この $\mathfrak{O}_{X/\sim}$ は位相であるための三つの条件を満たします。

問9.9　このことを示せ。

(ここで一般に

$$ {\pi_X}^{-1}(\tilde{O}) = \{x \in X \mid \pi_X(x) \in \tilde{O}\} \ = \ \{x \in X \mid [x] \in \tilde{O}\} \ = \ \bigcup_{[x]\in\tilde{O}} [x]$$

より、${\pi_X}^{-1}(\tilde{O})$ は同値類たちの和集合であることに注意しておきましょう。)

$\mathfrak{O}_{X/\sim}$ を商位相、$(X/\sim, \mathfrak{O}_{X/\sim})$ を商位相空間と呼びます。特に断らない限り、位相空間の商集合には、商位相が入っていると考えるのが慣例です。

このように定義しておくと、一般に写像 $f : X \to Y$ に対し、f が連続ならば、商写像 $\pi_Y : Y \to Y/\sim$ との合成写像

$$\begin{aligned} \pi_Y \circ f : X &\to Y/\sim \\ x &\mapsto [f(x)] \end{aligned}$$

も自動的に連続になります。

(ここで Y の同値関係、商集合、同値類も X と同じ表記を用いていますが、もちろん一般には同じものではありません。)

さて、この $(X/\sim, \mathfrak{O}_{X/\sim})$ から位相空間 $(Y, \mathfrak{O}_Y)$ への写像について考えます。一般に写像 $g: X/\sim \to Y$ を定義するとき、任意の $[x] \in X/\sim$ に対し、$[x]$ の代表元 x を一つ選び、これを用いて $g([x])$ の値を定めることが多いでしょう。しかし、これは実は $X/\sim$ ではなく X から Y への別の写像を考えているに過ぎません。この写像を $\tilde{g}: X \to Y$ とします。

今、写像 g が well-defined であるためには、各 $[x]$ に対して、その代表元の取り方に依らず、$g([x])$ の値が与えられている、すなわち

$$[x] = [x'] \Longrightarrow g([x]) = g([x'])$$

言い換えると

$$x \sim x' \Longrightarrow \tilde{g}(x) = \tilde{g}(x')$$

が成り立たなければなりません。

　この条件を満たすよう、g が定義できたとしましょう。このとき $\tilde{g} = g \circ \pi_X$ が成り立っています。

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \pi_X \downarrow & \circlearrowleft \searrow & \tilde{g} \\ X/\sim & \underset{g}{\longrightarrow} & Y \end{array}$$

このとき、$\tilde{g}$ が連続ならば自動的に、g もまた商位相について連続になります。

　実際、Y の任意の開集合 O_Y に対し、$\tilde{g}$ の連続性より $\tilde{g}^{-1}(O_Y)$ は X の開集合になりますが、ここで

$$\tilde{g}^{-1}(O_Y) = (g \circ \pi_X)^{-1}(O_Y) \ = \ {\pi_X}^{-1}(g^{-1}(O_Y))$$

なので、${\pi_X}^{-1}(g^{-1}(O_Y))$ が X の開集合となり、商位相の定義より $g^{-1}(O_Y)$ は $X/\sim$ の開集合となります。

　すなわち、写像 $g : X/\sim \to Y$ が well-defined でありさえすれば、$\tilde{g} = g \circ \pi_X : X \to Y$ が連続の時、g も連続となるわけです。

　ここまでの考察を組み合わせると、もう少し複雑な場合にも適用できます。

まず連続写像 $f : X \to Y$ が与えられたとします。

このとき、f と Y の商写像 $\pi_Y : Y \to Y/\sim$ との合成写像 $\pi_Y \circ f : X \to Y/\sim$ も連続となりますが、さらにこれから

$$\pi_Y \circ f = g \circ \pi_X$$

を満たす写像 $g : X/\sim \to Y/\sim$ が well-defined に定義できた(すなわち $\tilde{g} = \pi_Y \circ f$. 前頁までの議論での$Y$ を $Y/\sim$ に、f を $\pi_Y \circ f$ に、それぞれ置き換えて適用していることに注意) とすると、この g もまた連続写像となるわけです。

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ X & \longrightarrow & Y \\ \pi_X \downarrow & \circlearrowleft \searrow \circlearrowright & \downarrow \pi_Y \\ X/\sim & \longrightarrow & Y/\sim \\ & g & \end{array}$$

さて、話を極座標に戻しましょう。ここで偏角 θ は $[0,2\pi)$ などに制限せず、一般角で $\mathbf{R}$ 全体(閉区間 $[0,2\pi]$ を含む範囲であれば、必ずしも全体でなくても同様の議論はできます) を動くようにとることにします。従って (r,θ) を考える範囲は

$$X=[0,\infty)\times\mathbf{R}(\subset\mathbf{R}^2)$$

となります。このとき、写像

$$\begin{aligned}\tilde{h}:X&\longrightarrow\mathbf{R}^2\\(r,\theta)&\mapsto(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)\end{aligned}$$

はもちろん全射ではあるものの単射ではありません。

そこで、X 上の同値関係 $\sim$ を

$$(r,\theta) \sim (r',\theta') \Longleftrightarrow \tilde{h}(r,\theta) = \tilde{h}(r',\theta')$$

すなわち

「$r = r' = 0$」または「$r = r'$ かつ $\theta - \theta' \in 2\pi\mathbf{Z}$」

により定義すると、写像

$$\begin{aligned} h : X/\sim &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ [(r,\theta)] &\mapsto (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{aligned}$$

は全単射になるばかりか、同相写像になります。

問9.10　このことを示せ。

一度このことを確認しておけば、一般角で表した (r, θ) の空間 X から X 自身への連続写像 $f : X \to X$ に対し、$\pi_X \circ f = g \circ \pi_X$ を満たす写像 $g : X/\sim \to X/\sim$ もまた連続写像となります。

$$
\begin{array}{ccc}
 & f & \\
X & \longrightarrow & X \\
\pi_X \downarrow & \circlearrowleft \searrow \circlearrowright & \downarrow \pi_X \\
X/\sim & \longrightarrow & X/\sim \\
 & g &
\end{array}
$$

そして、これを元の座標 (x, y) で書き直した写像 $h \circ g \circ h^{-1} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ も、h が同相写像(よって h, h^{-1} 共に連続) であることから、やはり連続写像となることがわかります。

$$\begin{tikzcd}
X/\sim \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X/\sim \arrow[d, "h"] \\
\mathbf{R}^2 \arrow[r, "h \circ g \circ h^{-1}"'] & \mathbf{R}^2
\end{tikzcd}$$