# 位相数学1＆同演習・講義資料

$\boxed{\text{第13回}}$

(2024年7月10日(水)講義分)

## §10　距離空間の完備性

$\mathbf{R}^n$ の点列$\{\boldsymbol{a}_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ が$\boldsymbol{a}$ に収束するとは、次で定義されます。

$$\forall\epsilon > 0, \exists K = K(\epsilon) \in \mathbf{N} \text{ s.t. } k \geq K \Longrightarrow ||\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a}|| < \epsilon$$

一方、$\{\boldsymbol{a}_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ がCauchy 列であるとは、次で定義されます。

$$\forall\epsilon > 0, \exists K' = K'(\epsilon) \in \mathbf{N}$$
$$\text{s.t. } k \geq K', k' \geq K' \Longrightarrow ||\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a}_{k'}|| < \epsilon$$

$\mathbf{R}^n$ の収束する点列は Cauchy 列です。

実際、$\forall \epsilon > 0$ に対し、

$$K'(\epsilon) := K\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$$

ととれば $k \geq K'$, $k' \geq K'$ のとき

$$||\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a}_{k'}|| \leq ||\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a}|| + ||\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_{k'}|| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

が成り立ちます。

逆に、$\mathbf{R}^n$ の Cauchy 列は収束します。

(この事実は、１年次の数学要論Ｂで学習済みと思いますが、忘れている人は復習しておきましょう。)

一般の距離空間 $(X, d)$ においても、点列 $\{a_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ が収束する、すなわち

$$\forall\epsilon > 0, \exists K = K(\epsilon) \in \mathbf{N} \text{ s.t. } k \geq K \Longrightarrow d(a_k, a) < \epsilon$$

が成り立つならば Cauchy 列

$$\begin{aligned}\forall\epsilon > 0, \exists K' = K'(\epsilon) \in \mathbf{N}& \\ \text{s.t. } k \geq K', k' \geq K' \Longrightarrow d(a_k, a_{k'}) < \epsilon&\end{aligned}$$

です。

しかし、Cauchy 列だからと言って、収束するとは限りません。任意の Cauchy 列が収束するような距離空間を、完備距離空間と呼びます。

通常のユークリッド距離に関して、$\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^n$ は完備ですが、$\mathbf{Q}$ は完備でなく、一方 $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ は完備(∵ $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ の Cauchy 列は最初または途中から一定) です。より一般に、$\mathbf{R}^n$ の任意の閉集合は完備ですが、閉でない部分集合は完備ではありません。

さらに一般に、完備距離空間 $(Y, d_Y)$ の任意の閉集合 $A$ は、集積点を全て含むので、その任意の Cauchy 列の、$Y$ の点列としての極限点を含むため、部分距離空間 $(A, d_Y|_{A\times A})$ として完備距離空間となります。

今、閉区間 $I=[a,b]$ $(a<b)$ 上の連続関数全体の集合を $C(I)$ で表すことにします。$C(I)$ は関数の和とスカラー倍によって、自然にベクトル空間となります。

$\mathbf{R}^n$ の場合の $L^1$, $L^2$, $L^\infty$ ノルムの和の部分を積分に置き換えることにより、$C(I)$ 上にも、次のように $L^1$, $L^2$, $L^\infty$ ノルムを定義することができます。

$$||f||_1 := \int_a^b |f(x)|dx$$

$$||f||_2 := \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

$$||f||_\infty := \max_{a\le x\le b} |f(x)|$$

( $||f||_\infty$ と積分の関係は後述)

これらのノルムから定まる距離

$$
\begin{aligned}
d_1(f,g) := ||f-g||_1 &= \int_a^b |f(x)-g(x)|dx \\
d_2(f,g) := ||f-g||_2 &= \left(\int_a^b |f(x)-g(x)|^2 dx\right)^{1/2} \\
d_\infty(f,g) := ||f-g||_\infty &= \max_{a\le x\le b} |f(x)-g(x)|
\end{aligned}
$$

により、$C(I)$ は距離空間になります。

$L^\infty$ ノルムに関する収束は一様収束であり、連続関数列の一様収束極限は連続関数ですから、$L^\infty$ ノルムを備えた $C(I)$ は完備距離空間になります。(教科書の例29.1, 例題29.1, 問29.1)

一方、$L^1$, $L^2$ ノルムに関する収束では、連続関数列の収束極限は連続関数とは限らないので、$L^1$, $L^2$ ノルムを備えた $C(I)$ は完備距離空間になりません。( $L^1$ については問29.4)

実は、$L^2$ ノルム $||f||_2$ の 2 を $p \in [1, \infty)$ に取り替えることにより、 $L^p$ ノルム

$$||f||_p = \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

も定義され、

$$\lim_{p \to \infty} ||f||_p = ||f||_\infty$$

を満たします。(これは $\mathbf{R}^n$ でも同様です。)

これらのノルムを備えた関数空間は、３年次の解析学3,4で重要な役割を果たします。

**問 10.1** $I = [0, 1]$ 上の連続関数 $f$ が $\max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| = 1$ を満たすとき、

$$\lim_{p \to \infty} ||f||_p = 1$$

が成り立つことを示せ。

**問 10.2**　$I = [0,1]$ 上の関数 $g$ で、条件

$$\begin{cases} \exists N \in \mathbf{N}, \exists a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}, a_N \text{ s.t.} \\ 0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_{N-1} < a_N = 1, \\ g \text{ は } [a_{i-1}, a_i)\ (i = 1, \ldots, N-1) \text{ 及び } [a_{N-1}, a_N] \text{ 上定数関数} \end{cases}$$

を満たすもの全体を $X$ とする。$I = [0,1]$ 上の任意の連続関数 $f$ に対し、$X$ の元の列 $\{g_k\}$ で、

$$\lim_{k \to \infty} ||g_k - f||_1 = 0$$

を満たすものが存在することを示せ。

完備距離空間 $(Y,d_Y)$ の任意の部分集合 $X$ に対し、その閉包 $\overline{X}$ は閉集合ですから、既にお話しましたように、部分距離空間 $(\overline{X}, d_Y|_{\overline{X}\times\overline{X}})$ として完備距離空間となります。

より一般に、(完備でない) 距離空間 $(X,d)$ に対して、完備距離空間 $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ と、等長写像 $\iota : X \to \widetilde{X}$ が存在し、かつ像 $\iota(X)$ が $\widetilde{X}$ の中で稠密、すなわち $\overline{\iota(X)} = \widetilde{X}$ を満たすとき、組 $(\widetilde{X},\iota)$ または $\widetilde{X}$ を、$X$ の完備化と言います。

( $\iota$ を用いるのは、$(X,d)$ とその像 $(\iota(X),\widetilde{d}|_{\iota(X)\times\iota(X)})$ を距離空間として同一視して、実質的に包含写像と見なすためです。)

先に見た閉包$\overline{X}$ は正にその典型ですが、$X$ が既知の完備距離空間の部分集合(と等長) でない場合にも、$X$ の完備化となる距離空間を、具体的に構成することができます。

基本的な考え方は、完備でない距離空間である有理数全体の集合 $\mathbf{Q}$ から、$\mathbf{Q}$ 内では収束しない Cauchy 列の極限値として、新たに無理数を導入し、完備距離空間である実数全体の集合 $\mathbf{R}$ を構成したときと同じ(厳密にはデーデキントの切断ですが、ここでは無理数を無限小数で表したときの、有限小数による近似列との関係を思い浮かべてもよいでしょう) ですが、一般の距離空間には、演算や順序関係が与えられているとは限らないので、論証のその部分を、距離関数を用いて代替します。

任意の距離空間 $(X,d)$ において、その Cauchy 列全体の集合を $C_X$ で表します。$C_X$ の任意の二元 $\{x_k\}$, $\{x'_k\}$ (以下 $_{k\in\mathbf{N}}$ は省略します) に対し、数列 $\{d(x_k,x'_k)\}$ は、任意の $k,k'\in\mathbf{N}$ について

$$d(x_k,x'_k)\le d(x_k,x_{k'})+d(x_{k'},x'_{k'})+d(x'_{k'},x'_k)$$

より

$$d(x_k,x'_k)-d(x_{k'},x'_{k'})\le d(x_k,x_{k'})+d(x'_{k'},x'_k)$$

を満たし、ここで $k,k'$ は任意ですから、入れ替えて

$$d(x_{k'},x'_{k'})-d(x_k,x'_k)\le d(x_{k'},x_k)+d(x'_k,x'_{k'})=d(x_k,x_{k'})+d(x'_{k'},x'_k)$$

も満たしますから、結局

$$|d(x_k,x'_k)-d(x_{k'},x'_{k'})|\le d(x_k,x_{k'})+d(x'_{k'},x'_k)$$

が成り立ちます。

今、$\{x_k\}$, $\{x'_k\}$ は共に Cauchy 列なので、

$$\forall \epsilon > 0, \exists K = K(\epsilon) \in \mathbf{N}$$
$$\text{s.t. } k \geq K, k' \geq K \Longrightarrow d(x_k, x_{k'}) < \epsilon$$

かつ

$$\forall \epsilon > 0, \exists K' = K'(\epsilon) \in \mathbf{N}$$
$$\text{s.t. } k \geq K', k' \geq K' \Longrightarrow d(x'_k, x'_{k'}) < \epsilon$$

が成り立ちます。

従って、任意の $\epsilon > 0$ に対し、

$$K''(\epsilon) := \max\left\{K\left(\frac{\epsilon}{2}\right), K'\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\right\}$$

ととれば、$k \geq K''$, $k' \geq K''$ のとき

$$|d(x_k, x'_k) - d(x_{k'}, x'_{k'})| \leq d(x_k, x_{k'}) + d(x'_{k'}, x'_k) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

が成り立つので、数列 $\{d(x_k, x'_k)\}$ は $\mathbf{R}$ の Cauchy 列となり、極限値を持ちます。(ここまで教科書の定理31.1)

そこで、$C_X$ 上に、

$$\{x_k\} \sim \{x'_k\} \iff \lim_{k\to\infty} d(x_k, x'_k) = 0$$

により関係を定めると、これは同値関係となります。(例題31.1, 問31.1)

この同値関係による商集合 $C_X/\sim$ を $\widetilde{X}$ で、$\{x_k\}$ を代表元とする同値類(つまり $\widetilde{X}$ の元) を $[\{x_k\}]$ で、それぞれ表します。そして $\widetilde{X}\times\widetilde{X}$ 上に、

$$\begin{aligned}\widetilde{d}:\widetilde{X}\times\widetilde{X}&\to\mathbf{R}\\ ([\{x_k\}],[\{x'_k\}])&\mapsto\lim_{k\to\infty}d(x_k,x'_k)\end{aligned}$$

により関数を定めると、これは well-defined な(代表元の取り方によらない) $\widetilde{X}$ 上の距離関数(３条件を満たす) になります。

問**10.3**　このことを示せ。

( well-defined は教科書の定理31.2に証明がありますが、距離の３条件を満たすことは定理31.3の証明抜きで例題扱いとなっています。)

ここで、写像

$$\iota : X \to \widetilde{X}$$
$$x \mapsto \iota(x)$$

を

$$\iota(x) := [\{x\}] = [\{x, x, \ldots, x, \ldots\}]$$

(つまり点 $x$ を動かない定値点列の同値類) により定めると、等長写像になります。(定理31.4, 問31.2)

今、$\widetilde{X}$ の任意の元 $\xi = [\{x_k\}]$ に対し、その任意の代表元 $\{x_k\}$ は $X$ の Cauchy 列ですから、

$$\forall\epsilon > 0, \exists K = K(\epsilon) \in \mathbf{N}$$
$$\text{s.t. } \ell \geq K, k \geq K \Longrightarrow d(x_\ell, x_k) < \epsilon$$

が成り立ちます。

そこで、各 $\ell \in \mathbf{N}$ に対し、$\{x_k\}$ の第 $\ell$ 項 $x_\ell$ を動かない定値点列の同値類 $\iota(x_\ell)$ (つまり、前頁の $[\{x\}]$ で $x = x_\ell$ と取ったもの) を $\xi_\ell$ として、$\widetilde{X}$ の点列 $\{\xi_\ell\} = \{\iota(x_\ell)\}$ を考えると、

$$\widetilde{d}(\xi_\ell, \xi) = \widetilde{d}(\iota(x_\ell), [\{x_k\}]) = \lim_{k\to\infty} d(x_\ell, x_k)$$

が成り立ちます。

任意の $\epsilon > 0$ に対し、

$$L(\epsilon) := K\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$$

ととれば、$\ell \geq L$, $k \geq L$ のとき $d(x_\ell, x_k) < \epsilon/2$ が成り立つので、

$$\widetilde{d}(\xi_\ell, \xi) = \lim_{k\to\infty} d(x_\ell, x_k) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

より、$\{\xi_\ell\}$ は $\xi$ に収束します。

よって $\overline{\iota(X)} = \widetilde{X}$ が成り立ち、$\iota(X)$ は $\widetilde{X}$ において稠密です。

(ここまで定理31.5)

そして特に、距離空間$(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ は完備です。

実際、$\widetilde{X}$ の任意の Cauchy 列$\{\xi_\ell\}$ (前頁までの $\{\xi_\ell\}$ とは別物) において、

$$\forall \epsilon > 0, \exists L' = L'(\epsilon) \in \mathbf{N} \\ \text{s.t. } \ell \geq L', k \geq L' \Longrightarrow \widetilde{d}(\xi_\ell, \xi_k) < \epsilon$$

が成り立ちますが、一方、各 $k \in \mathbf{N}$ につき、上で示した $\iota(X)$ の稠密性から、

$$\forall \epsilon > 0, \exists x \in X \text{ s.t. } \widetilde{d}(\iota(x), \xi_k) < \epsilon$$

も成り立ちますから、特に $\epsilon = 1/k$ ととったときの$x$ を一つ選び $x_k$ (これも前頁までの $x_k$ とは別物) とおきます。

このとき、改めて任意の $\epsilon > 0$ に対し、

$$K'''(\epsilon) := \max\left\{\frac{3}{\epsilon}, L'\left(\frac{\epsilon}{3}\right)\right\}$$

ととれば、$k \geq K'''$, $k' \geq K'''$ のとき、

$$\begin{aligned} d(x_k, x_{k'}) &= \widetilde{d}(\iota(x_k), \iota(x_{k'})) \\ &\leq \widetilde{d}(\iota(x_k), \xi_k) + \widetilde{d}(\xi_k, \xi_{k'}) + \widetilde{d}(\xi_{k'}, \iota(x_{k'})) \\ &< \frac{1}{k} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{1}{k'} \ \leq \ \epsilon \end{aligned}$$

より、$\{x_k\}$ は $X$ の Cauchy 列なので、$\xi := [\{x_k\}]$ (もちろん前々頁までの $\xi$ とは別物) は $\widetilde{X}$ の元です。

ここで、各 $\ell \in \mathbf{N}$ に対し、

$$\widetilde{d}(\iota(x_\ell), \xi) = \widetilde{d}(\iota(x_\ell), [\{x_k\}]) = \lim_{k \to \infty} d(x_\ell, x_k)$$

(別物でも、この等式は成立) でしたから、任意の $\epsilon > 0$ に対し、

$$L''(\epsilon) := K'''\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$$

ととれば、$\ell \geq L''$, $k \geq L''$ のとき

$$d(x_\ell, x_k) < \frac{\epsilon}{2}$$

より、

$$\widetilde{d}(\iota(x_\ell), \xi) = \lim_{k \to \infty} d(x_\ell, x_k) \leq \frac{\epsilon}{2}$$

が成り立ちます。

従って、さらに

$$\begin{aligned}\widetilde{d}(\xi_\ell, \xi) &\leq \widetilde{d}(\xi_\ell, \iota(x_\ell)) + \widetilde{d}(\iota(x_\ell), \xi) \\ &< \frac{1}{\ell} + \frac{\epsilon}{2} \ \leq \ \frac{\epsilon}{6} + \frac{\epsilon}{2} \ < \ \epsilon\end{aligned}$$

も成り立ち、$\widetilde{X}$ の Cauchy 列$\{\xi_\ell\}$ は、$\widetilde{X}$ の元$\xi$ に収束します。

(ここまで定理31.6)