位相数学1＆同演習・講義資料

$\boxed{\text{第14回}}$

(2024年7月17日(水)講義分)

§10　距離空間の完備性(続き)

　一般に、距離空間 (X,d) 上で定義された自分自身への写像 $f: X \to X$ が、

$$\exists c \in (0,1) \text{ s.t. } \forall x \in X, \forall x' \in X, d(f(x), f(x')) \leq c\, d(x,x')$$

を満たすとき、f は X の縮小写像であると言います。

　また、$f(a)=a$ を満たす点$a \in X$ を f の不動点と呼びます。

　実は、完備距離空間において、任意の縮小写像は、ただ一つの不動点を持ちます。この事実を縮小写像の原理と呼びます。

実際、縮小写像 $f : X \to X$ に対し、任意に $a_1 \in X$ を選び、

$$a_{k+1} := f(a_k) \quad (k \in \mathbf{N})$$

により点列 $\{a_k\}$ を定義すれば、

$$\begin{aligned} d(a_k, a_{k+1}) &= d(f(a_{k-1}), f(a_k)) \\ &\leq c\, d(a_{k-1}, a_k) \\ &\leq \cdots \\ &\leq c^{k-1} d(a_1, a_2) \quad (k \in \mathbf{N}) \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}
d(a_k, a_{k+\ell}) &\leq d(a_k, a_{k+1}) + \cdots + d(a_{k+\ell-1}, a_{k+\ell}) \\
&\leq c^{k-1} d(a_1, a_2) + \cdots + c^{k+\ell-2} d(a_1, a_2) \\
&= \frac{c^{k-1}(1-c^\ell)}{1-c} d(a_1, a_2) \\
&\leq \frac{c^{k-1}}{1-c} d(a_1, a_2) \quad (k, \ell \in \mathbf{N})
\end{aligned}$$

が成り立つので、$\{a_k\}$ は Cauchy 列より収束します。

その極限点を a とすれば、

$$\begin{aligned}
d(a, f(a)) &\leq d(a, a_k) + d(a_k, f(a)) \\
&= d(a, a_k) + d(f(a_{k-1}), f(a)) \\
&\leq d(a, a_k) + c\, d(a_{k-1}, a) \ \rightarrow \ 0 \quad (k \to \infty)
\end{aligned}$$

より $d(a, f(a)) = 0$ すなわち $f(a) = a$ が成り立ちます。

また、f の任意の不動点 a, a' に対し、

$$d(a,a') = d(f(a), f(a')) \leq c\, d(a,a')$$

より

$$(1-c)d(a,a') \leq 0$$

が成り立つので、$1-c>0$ より $d(a,a')=0$ すなわち $a=a'$ が成り立ち、f の不動点は一意です。(ここまで定理 29.2)

問10.4　縮小写像は連続であることを示せ。 (注意 29.2)

$\boxed{\text{復習}}$($\mathbf{R}^n$ の Cauchy 列が収束することの証明)

(この事実は、1年次の数学要論Bで学習済みと思いますが、復習のため、ここに証明を記しておきます。)

($n = 1$ の場合)

　まずCauchy 列は有界であることに着目します。

問10.5　このことを示せ。

有界な数列$\{a_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ に対し、

$$\overline{a}_k := \sup\{a_\ell \mid \ell \geq k\} \quad (k \in \mathbf{N})$$

とおけば、

$$k < k' \implies \{a_\ell \mid \ell \geq k\} \supset \{a_\ell \mid \ell \geq k'\}$$

より、$\{\overline{a}_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ は下に有界な広義単調減少数列なので収束します(実数の連続性)。その極限

$$\lim_{k\to\infty} \overline{a}_k = \inf_{k\in\mathbf{N}} \overline{a}_k = \inf_{k\in\mathbf{N}} \sup_{\ell\geq k} a_\ell$$

を$\{a_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ の上極限値と呼び、

$$\limsup_{k\to\infty} a_k, \quad \overline{\lim_{k\to\infty}}\, a_k$$

などと表します。

また、

$$\underline{a}_k := \inf\{a_\ell \mid \ell \geq k\} \quad (k \in \mathbf{N})$$

とおけば、再び

$$k < k' \implies \{a_\ell \mid \ell \geq k\} \supset \{a_\ell \mid \ell \geq k'\}$$

より、$\{\underline{a}_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ は上に有界な広義単調増加数列なので収束します(実数の連続性)。その極限

$$\lim_{k\to\infty} \underline{a}_k = \sup_{k\in\mathbf{N}} \underline{a}_k = \sup_{k\in\mathbf{N}} \inf_{\ell\geq k} a_\ell$$

を$\{a_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ の下極限値と呼び、

$$\liminf_{k\to\infty} a_k, \quad \varliminf_{k\to\infty} a_k$$

などと表します。

Cauchy 列ならば、上極限値と下極限値は一致します。
実際、$\{a_k\}$ は Cauchy 列より、次が成り立ちます。

$$\forall\epsilon>0,\exists K'=K'(\epsilon)\in\mathbf{N}$$
$$\text{s.t. } k\ge K', k'\ge K' \implies |a_k-a_{k'}|<\epsilon$$
$$\text{すなわち } -\epsilon<a_k-a_{k'}<\epsilon$$

$\{a_k\}$ の上極限値を $\overline{a}$ とすると、定義より次が成り立ちます。

$$\forall\epsilon>0,\exists\overline{K}=\overline{K}(\epsilon)\in\mathbf{N}\text{ s.t. } k\ge\overline{K} \implies |\overline{a}_k-\overline{a}|<\epsilon$$
$$\text{すなわち } \overline{a}-\epsilon<\overline{a}_k<\overline{a}+\epsilon$$

$\{a_k\}$ の下極限値を $\underline{a}$ とすると、定義より次が成り立ちます。

$$\forall\epsilon>0,\exists\underline{K}=\underline{K}(\epsilon)\in\mathbf{N}\text{ s.t. } k\ge\underline{K} \implies |\underline{a}_k-\underline{a}|<\epsilon$$
$$\text{すなわち } \underline{a}-\epsilon<\underline{a}_k<\underline{a}+\epsilon$$

同じ $\epsilon > 0$ に対して、三つの K の中から最大のものを選んで、

$$K_0 = K_0(\epsilon) := \max\{K'(\epsilon), \overline{K}(\epsilon), \underline{K}(\epsilon)\}$$

とおき、$k \geq K_0$ を一つとり固定します。

このとき、上限と下限の定義より、やはり共通の $\epsilon > 0$ に対して、

$$\exists\overline{\ell} \geq k \text{ s.t. } \overline{a}_k - \epsilon < a_{\overline{\ell}} \leq \overline{a}_k \text{ より } \overline{a} - 2\epsilon < a_{\overline{\ell}} < \overline{a} + \epsilon$$

$$\exists\underline{\ell} \geq k \text{ s.t. } \underline{a}_k \leq a_{\underline{\ell}} < \underline{a}_k + \epsilon \text{ より } \underline{a} - \epsilon < a_{\underline{\ell}} < \underline{a} + 2\epsilon$$

が成り立ちますから、これらを併せて

$$-\epsilon < a_{\overline{\ell}} - a_{\underline{\ell}} < (\overline{a} + \epsilon) - (\underline{a} - \epsilon) = \overline{a} - \underline{a} + 2\epsilon$$

$$\overline{a} - \underline{a} - 4\epsilon = (\overline{a} - 2\epsilon) - (\underline{a} + 2\epsilon) < a_{\overline{\ell}} - a_{\underline{\ell}} < \epsilon$$

を得ます。

よって、上極限値と下極限値の間には、

$$-3\epsilon < \overline{a} - \underline{a} < 5\epsilon$$

が成り立ちますが、ここで $\epsilon > 0$ は任意でしたから、$\overline{a} - \underline{a} = 0$ すなわち $\overline{a} = \underline{a}$ が示されました。

従って、極限値

$$\lim_{k\to\infty} a_k$$

が存在します。

($n \geq 2$ の場合)

$\mathbf{R}^n$ の Cauchy 列$\{\boldsymbol{a}_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ の各項を

$$\boldsymbol{a}_k = (a_{1k}, \ldots, a_{nk}) \quad (k \in \mathbf{N})$$

と表すとき、各成分の列

$$\{a_{1k}\}_{k\in\mathbf{N}}, \ldots, \{a_{nk}\}_{k\in\mathbf{N}}$$

は、

$$|a_{1k} - a_{1k'}|, \ldots, |a_{nk} - a_{nk'}| \leq ||\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a}_{k'}||_2 \quad (k, k' \in \mathbf{N})$$

より$\mathbf{R}$ の Cauchy 列なので、収束します。

　ここで、それらの極限値を

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n$$

とおけば、$\{\boldsymbol{a}_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ は L^1 ノルムに関して極限点

$$\boldsymbol{a} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^n$$

に収束、すなわち

$$||\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a}||_1 = |a_{1k} - \alpha_1| + \cdots + |a_{nk} - \alpha_n| \to 0 \quad (k \to \infty)$$

が成り立ちますから、これと同値な距離を定める L^2 ノルムに関しても(言い換えれば通常のユークリッド距離に関しても) $\boldsymbol{a}$ に収束、すなわち

$$||\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a}||_2 \to 0 \quad (k \to \infty)$$

が成り立ちます。