位相数学1＆同演習・講義資料

$\boxed{\text{第15回}}$

(2024年7月24日(水)講義分)

$\boxed{\text{復習}}$

$\boxed{\text{位相空間}}$

X ：集合

2^X ： X のべき集合

$\mathfrak{O} \subset 2^X$

$\mathfrak{O}$ ： X の位相(開集合系) $\Longleftrightarrow$ (O1),(O2),(O3) をみたす

(O1) $X, \emptyset \in \mathfrak{O}$

(O2) $O_\lambda \in \mathfrak{O}\ (\lambda \in \Lambda) \Longrightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathfrak{O}$

(O3) $O_k \in \mathfrak{O}\ (k = 1, \ldots, K) \Longrightarrow \bigcap_{k=1}^{K} O_k \in \mathfrak{O}$

$(X, \mathfrak{O})$ ：位相空間

$\boxed{\text{距離空間}}$

X ：集合

$d : X \times X \to \mathbf{R}$ ： X 上の距離(関数) $\Longleftrightarrow$ (1),(2),(3) をみたす

(1) $d(x, x') \geq 0 \ (x, x' \in X)$

$d(x, x') = 0 \Longleftrightarrow x = x'$

(2) $d(x, x') = d(x', x) \ (x, x' \in X)$

(3) $d(x, x'') \leq d(x, x') + d(x', x'') \ (x, x', x'' \in X)$

(X, d) ：距離空間

$\boxed{\text{距離空間の位相}}$

(X,d) ：距離空間

$a \in X$, $\epsilon > 0$

2^X ： X のべき集合

$U, O \subset X$ ($\iff U, O \in 2^X$)

$B(a;\epsilon) = \{x \in X \mid d(x,a) < \epsilon\}$ ： a の ϵ 近傍

a が U の内点(U が a の近傍) $\iff \exists \epsilon > 0$ s.t. $B(a;\epsilon) \subset U$

$\mathfrak{U}(a) = \{U \in 2^X \mid U$ ： aの近傍$\}$ ： a の近傍系

O が X の開集合$\iff O$ の各点が O の内点

$\iff \forall a \in O, \exists \epsilon_a > 0$ s.t. $B(a;\epsilon_a) \subset O \Longrightarrow O = \bigcup_{a \in O} B(a;\epsilon_a)$

$\mathfrak{O} = \{O \in 2^X \mid O$ ： Xの開集合$\}$ ： (X,d) の位相

$\boxed{\text{写像の連続性}}$

$(X, \mathfrak{O}_X)$, $(Y, \mathfrak{O}_Y)$ ：位相空間

$\mathfrak{U}_X(\cdot)$, $\mathfrak{U}_Y(\cdot)$ ：それぞれの近傍系

$a \in X$

$f : X \to Y$ が a で連続$\iff \forall U \in \mathfrak{U}_Y(f(a)), f^{-1}(U) \in \mathfrak{U}_X(a)$

$f : X \to Y$ が連続写像$\iff \forall O \in \mathfrak{O}_Y, f^{-1}(O) \in \mathfrak{O}_X$

$f : X \to Y$ が開写像$\iff \forall O' \in \mathfrak{O}_X, f(O') \in \mathfrak{O}_Y$

$f : X \to Y$ が同相写像$\iff f$ が全単射かつ連続写像かつ開写像

$(X, \mathfrak{O}_X)$ と $(Y, \mathfrak{O}_Y)$ が同相$\iff \exists f : X \to Y$ ：同相写像

$\boxed{\text{部分距離空間}}$

(Y, d_Y) ：距離空間

$\mathfrak{O}_Y$ ： (Y, d_Y) の位相

$X \subset Y$

$d_X = d_Y|_{X \times X}$ ： X 上の距離

(X, d_X) ： (Y, d_Y) の部分距離空間

$\mathfrak{O}_X = \{O \cap X \mid O \in \mathfrak{O}_Y\}$ ： (X, d_X) の(相対)位相

$\iota_X : X \hookrightarrow Y$ ：包含写像は連続

$\boxed{\mathbf{R}^n \text{ 上の距離の例}}$

$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n), \boldsymbol{x}' = (x'_1, \ldots, x'_n) \in \mathbf{R}^n$

$$d_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - x'_k)^2}$$

$$d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \sum_{k=1}^{n} |x_k - x'_k|$$

$$d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \max\{|x_k - x'_k| \mid k = 1, \ldots, n\}$$

離散距離

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \begin{cases} 1 & (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}') \\ 0 & (\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}') \end{cases}$$

$\boxed{\text{同値な距離}}$

X ：集合

d, $\widetilde{d}$ ： X 上の距離

d と $\widetilde{d}$ が同値

$\Longleftrightarrow \exists c_1 > 0, \exists c_2 > 0$ s.t.

$$c_1 d(x, x') \leq \widetilde{d}(x, x') \leq c_2 d(x, x') \quad (x, x' \in X)$$

$\Longrightarrow (X, d)$ と $(X, \widetilde{d})$ は同相

$\mathbf{R}^n$ 上の距離 d_2, d_1, d_∞ は同値

離散距離とは同値でない

$\boxed{\text{等長写像}}$

(X, d_X), (Y, d_Y) ：距離空間

$f : X \to Y$ が等長写像

$\Longleftrightarrow d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x')\ (x, x' \in X)$

(X, d_X) が (Y, d_Y) の部分距離空間

$\Longrightarrow \iota_X : X \hookrightarrow Y$ ：包含写像は等長写像

(X, d_X) と (Y, d_Y) が等長

$\Longleftrightarrow \exists f : X \to Y$ ：全単射かつ等長写像

$\Longrightarrow (X, d_X)$ と (Y, d_Y) は同相

$\boxed{\text{閉集合系}}$

$(X, \mathfrak{O}_X)$ ：位相空間

2^X ： X のべき集合

$A \subset X$ ($\iff A \in 2^X$)

$A^c = X \setminus A$

A が X の閉集合$\iff$ A^c が X の開集合($\iff A^c \in \mathfrak{O}_X$)

$\mathfrak{A}_X = \{A \in 2^X \mid A \ : \ X \text{の閉集合}\}$ ： $(X, \mathfrak{O}_X)$ の閉集合系

$\boxed{\text{距離空間の閉集合}}$

(X, d) ：距離空間

$a \in X$

$A \subset X$

$A^c = X \setminus A$

a が A の境界点 $\Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ B(a;\epsilon) \cap A \neq \emptyset,\ B(a;\epsilon) \cap A^c \neq \emptyset$

A が X の閉集合 $\Longleftrightarrow$ A が A の境界点を全て含む

a が A の集積点 $\Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ B(a;\epsilon) \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$

A が X の閉集合 $\Longleftrightarrow$ A が A の集積点を全て含む

$\boxed{\text{連結}}$

$(X, \mathfrak{O}_X)$ ：位相空間

$\mathfrak{A}_X$ ： $(X, \mathfrak{O}_X)$ の閉集合系

X ：弧状連結$\Longleftrightarrow$

$\forall x', \forall x'' \in X$, $\exists x : [0,1] \to X$ ：連続写像 s.t. $x(0) = x'$, $x(1) = x''$

X ：連結$\Longleftrightarrow \mathfrak{O}_X \cap \mathfrak{A}_X = \{X, \emptyset\}$

X ：弧状連結$\Longrightarrow X$ ：連結

$\boxed{\text{コンパクト}}$

$(X, \mathfrak{O}_X)$ ：位相空間

$X \subset \mathbf{R}^n \Longrightarrow \mathfrak{O}_X = \{O \cap X \mid O \in \mathfrak{O}_{\mathbf{R}^n}\}$

$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ ： X の開被覆 $\Longleftrightarrow U_\lambda \in \mathfrak{O}_X\ (\lambda \in \Lambda),\ X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$

$\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ ： X の開被覆 $\Longleftrightarrow O_\lambda \in \mathfrak{O}_{\mathbf{R}^n}\ (\lambda \in \Lambda),\ X \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$

X ：コンパクト $\Longleftrightarrow$

$\forall\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ ： X の開被覆, $\exists\Lambda' \subset \Lambda$ s.t. $\#\Lambda' < \infty$, $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda'} U_\lambda$

$\forall\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ ： X の開被覆, $\exists\Lambda' \subset \Lambda$ s.t. $\#\Lambda' < \infty$, $X \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda'} O_\lambda$

$\boxed{\text{有界閉集合}}$

(X, d) ：距離空間

X ：有界$\iff \exists a \in X$, $\exists R > 0$ s.t. $X = B(a; R)$

$\mathbf{R}^n \supset X$ ：有界$\iff \exists R > 0$ s.t. $X \subset B(\mathbf{0}; R)$

X ：コンパクト$\Longrightarrow X$ ：有界閉集合

$\mathbf{R}^n \supset X$ ：有界閉集合$\Longrightarrow X$ ：コンパクト

(ハイネ・ボレルの被覆定理)