幾何学特論A(幾何学講義II)・講義ノート

$\boxed{\text{第 1 回}}$

(2024年4月11日(木)配信分)

$\boxed{\S 1.\ 序}$

３辺の長さの和が L である三角形の内、面積が最大となるものは何かと言う問題を考える。答が正三角形であることは想像に難くないが、このことをきちんと証明してみたい。

３辺の長さを x_1, x_2, x_3 と置く。ここで、

$$s(x_1, x_2, x_3) := \frac{x_1 + x_2 + x_3}{2}$$

とおけば、ヘロンの公式より、この三角形の面積は

$$A(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{s(s - x_1)(s - x_2)(s - x_3)}$$

で与えられる。従って、問題は3 変数関数 $A(x_1, x_2, x_3)$ に関する、条件$s(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{L}{2}$ の下での極値問題と考えられる。

　但し、各辺の長さは正なので、

$$x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \quad x_3 > 0$$

でなければならず、さらに三角不等式より、

$$x_1 < x_2 + x_3, \quad x_2 < x_1 + x_3, \quad x_3 < x_1 + x_2$$

も成り立たなければならない。これらの不等式を全て同時に満たす $\mathbf{R}^3$ 内の領域を $\widetilde{\Omega}$ で表す。

　逆に $\widetilde{\Omega}$ 内の任意の (x_1, x_2, x_3) に対し、３辺の長さが x_1, x_2, x_3 である三角形が存在する。

　従って、上記の条件付極値問題は、$\widetilde{\Omega}$ 上で考えなければならない。

　このまま解いてもよいが、ここは条件式が簡単な一次式なので、x_3 を消去して、条件の無い 2 変数関数の極値問題として解く方が簡単である。その方針で考え直すと、次のようになる。

　２辺の長さが x_1, x_2 のとき、残る１辺の長さは $L - x_1 - x_2$ である。ここで各辺の長さは正なので、

$$x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \quad L - x_1 - x_2 > 0$$

でなければならない。さらに三角不等式より、

$$x_1 < x_2 + (L - x_1 - x_2) = L - x_1$$
$$x_2 < x_1 + (L - x_1 - x_2) = L - x_2$$
$$L - x_1 - x_2 < x_1 + x_2$$

も成り立たなければならない。

これらの不等式を整理してまとめると、

$$
\begin{aligned}
0 < \quad & x_1 \quad < \frac{L}{2} \\
0 < \quad & x_2 \quad < \frac{L}{2} \\
\frac{L}{2} < & x_1 + x_2 < L
\end{aligned}
$$

となり、無駄を省けば、

$$
(*) \qquad x_1 < \frac{L}{2}, \quad x_2 < \frac{L}{2}, \quad x_1 + x_2 > \frac{L}{2}
$$

を得る。

逆に $x_1 x_2$ 平面内の、上記の不等式 $(*)$ で表される直角三角形の内部領域 Ω 内の任意の (x_1, x_2) に対し、３辺の長さが x_1, x_2, $L - x_1 - x_2$ である三角形が存在する。

ここで、ヘロンの公式より、この三角形の面積は

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{L}{2}\left(\frac{L}{2}-x_1\right)\left(\frac{L}{2}-x_2\right)\left\{\frac{L}{2}-(L-x_1-x_2)\right\}} \\ &= \sqrt{\frac{L}{2}\left(\frac{L}{2}-x_1\right)\left(\frac{L}{2}-x_2\right)\left(x_1+x_2-\frac{L}{2}\right)} \end{aligned}$$

で与えられる。そこで、

$$f(x_1, x_2) := A^2 = \frac{L}{2}\left(\frac{L}{2}-x_1\right)\left(\frac{L}{2}-x_2\right)\left(x_1+x_2-\frac{L}{2}\right)$$

とおき、Ω 内での極値問題を考える。

$$
\begin{aligned}
f_{x_1}(x_1, x_2) &= \frac{L}{2}\left(\frac{L}{2} - x_2\right)\left\{-\left(x_1 + x_2 - \frac{L}{2}\right) + \left(\frac{L}{2} - x_1\right)\right\} \\
&= \frac{L}{2}\left(\frac{L}{2} - x_2\right)(-2x_1 - x_2 + L) \\
f_{x_2}(x_1, x_2) &= \frac{L}{2}\left(\frac{L}{2} - x_1\right)\left\{-\left(x_1 + x_2 - \frac{L}{2}\right) + \left(\frac{L}{2} - x_2\right)\right\} \\
&= \frac{L}{2}\left(\frac{L}{2} - x_1\right)(-x_1 - 2x_2 + L)
\end{aligned}
$$

より、$f_{x_1}(x_1, x_2) = f_{x_2}(x_1, x_2) = 0$ となるのは、

$$
x_2 = \frac{L}{2} \quad \text{または} \quad 2x_1 + x_2 = L
$$

かつ

$$
x_1 = \frac{L}{2} \quad \text{または} \quad x_1 + 2x_2 = L
$$

のときで、これは、次の４点に限られる。

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right),\ \left(0, \frac{L}{2}\right),\ \left(\frac{L}{2}, 0\right),\ \left(\frac{L}{3}, \frac{L}{3}\right)$$

しかし、前の３点は境界 $\partial\Omega$ 上の点(特に直角三角形の頂点)であり、Ω 内にあるのは、

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{L}{3}, \frac{L}{3}\right)$$

のみである。このとき、

$$L - x_1 - x_2 = \frac{L}{3}$$

なので、この点は正三角形を表している。

$\partial\Omega$ 上では

$$x_1 = \frac{L}{2} \quad \text{または} \quad x_2 = \frac{L}{2} \quad \text{または} \quad x_1 + x_2 = \frac{L}{2}$$

より $f(x_1, x_2) = 0$ であり、Ω 内では $f(x_1, x_2) > 0$ なので、$f(x_1, x_2)$ は $(x_1, x_2) = \left(\frac{L}{3}, \frac{L}{3}\right)$ で最大値をとる。特に、

$$A = \sqrt{f\left(\frac{L}{3}, \frac{L}{3}\right)} = \sqrt{\frac{L^4}{432}} = \frac{\sqrt{3}}{36}L^2$$

で、Ω 上では一般に、

$$A \leq \frac{\sqrt{3}}{36}L^2 \qquad (**)$$

が成り立つ。

この結論を、逆の観点から見直すと、同じ面積を囲む三角形の中では、正三角形が最も３辺の長さの和が短いと言うこともわかる。このことは、最初に戻って、3 変数関数 $s(x_1, x_2, x_3)$ に関する、条件 $A(x_1, x_2, x_3) =$ 定数 の下での極値問題と見た方がわかりやすいかもしれない。以下の話の流れとしては、この考え方の方がつながりはよいのだが、ここでは解きやすさを重視した。

ところで、不等式 $(**)$ 同様の主張は、一般の $n \geq 4$ についても n 角形の辺の長さの和と面積の関係において成り立つ。

$$A \leq \frac{\cot\frac{\pi}{n}}{4n} L^2$$

等号成立はもちろん正 n 角形のときである。この不等式を示すためには、$n-1$ 変数関数の極値問題を解く必要があるが、それでも、Ω は有限次元空間の領域ですむ。

一方ここで、不等式右辺の係数 $\dfrac{\cot\dfrac{\pi}{n}}{4n}$ は、n が大きくなるにつれて大きくなり、$n \to +\infty$ としたときの極限 $\dfrac{1}{4\pi}$ は、円周によって実現される。しかしながら、この円周も考慮対象とするべく、領域を囲む線を多角形のような折れ線ではなく、(閉)曲線まで広げるとなると、問題は無限次元の極値問題となってしまう。この問題こそが、等周問題と呼ばれる代表的な変分問題の一つに他ならない。

等周問題の解決編は、後日紹介することにして、今回は、もう少し基本的な(無限次元の)変分問題を紹介したい。

$f:(a,b)\to\mathbf{R}$ は C^1 級関数とする。$f(x)$ が $x=c$ で最小値 $f(c)$ をとるとき、$f'(c)=0$ が成り立つ。

$f:D(\subset\mathbf{R}^n)\to\mathbf{R}$ は C^1 級関数とする。$f(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$ で最小値 $f(\boldsymbol{c})$ をとるとき、任意のベクトル $\boldsymbol{h}$ に対し、

$$df_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{h})=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}(f(\boldsymbol{c}+\epsilon\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{c}))=\left.\frac{\partial}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0}f(\boldsymbol{c}+\epsilon\boldsymbol{h})=0$$

が成り立つ、すなわち全ての方向に関して、方向微分が 0 になる。ただし、今 f は C^1 級を仮定しているので、n 個の偏微分が 0 になりさえすれば、この条件は自動的に満たされる。

さて、H は、ある条件をみたす関数または写像全体の空間で、$I : H \to \mathbf{R}$ は汎関数とする。(この H は平均曲率とは別物。) $I(u)$ が最小値をとる所では、方向微分の意味で $I'(u) = 0$ が成り立つはずである。

例えば、H は境界 ∂D の温度を指定された閉領域 $\overline{D} \subset \mathbf{R}^n$ の熱分布全体、$I(u)$ は一階微分のノルムの二乗の積分とする。$u \in H$ が定常状態のとき、$I(u)$ は最小値（極小値）をとり、$I'(u) = 0$ が成り立つと考えられる。

ここで、$\dim H = \infty$ の場合の方向微分（第一変分） $I'(u)$ は、どのように考えればよいだろうか？

h は境界での値が 0 である関数とし、$u + \epsilon h$ により、境界の温度が一定な u の変分を考えると、次が成り立つ。

まず、とりあえず $n=1$ の場合を考える。従って、$\overline{D}$ は閉区間なので、$[a,b]$ とする。このとき、∂D は二点集合 $\{a,b\}$ であり、h は $h(a)=h(b)$ を満たす。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} I(u+\epsilon h) &= \frac{\partial}{\partial \epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} \int_a^b |(u+\epsilon h)'|^2 dx \\
&= \frac{\partial}{\partial \epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} \int_a^b (u'^2 + 2\epsilon u'h' + \epsilon^2 h'^2) dx \\
&= \int_a^b \frac{\partial}{\partial \epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} (u'^2 + 2\epsilon u'h' + \epsilon^2 h'^2) dx \\
&= \int_a^b 2u'h' dx \\
&= \int_a^b 2\{(u'h)' - u''h\} dx \\
&= 2[u'h]_a^b - 2\int_a^b u''h dx \\
&= 2(u'(b)h(b) - u'(a)h(a)) - 2\int_a^b u''h dx \\
&= -2\int_a^b u''h dx
\end{aligned}
$$

この意味で$I'(u) = 0$ であるとは、$u'' = 0$ を満たすことだと考えられる。このような u は、もちろん一次関数または定数関数に限られる。

このことは、両端の温度を固定した針金の温度分布が定常状態になると、そのグラフは直線(の一部である線分) で現れると言う、極めて自然なことを表している。

続いて、一般次元の場合。

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} I(u+\epsilon h) &= \left.\frac{\partial}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} \int_{\overline{D}} |\nabla(u+\epsilon h)|^2 d\boldsymbol{x} \\
&= \left.\frac{\partial}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} \int_{\overline{D}} (|\nabla u|^2 + 2\epsilon \nabla u \cdot \nabla h + \epsilon^2 |\nabla h|^2) d\boldsymbol{x} \\
&= \int_{\overline{D}} \left.\frac{\partial}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} (|\nabla u|^2 + 2\epsilon \nabla u \cdot \nabla h + \epsilon^2 |\nabla h|^2) d\boldsymbol{x} \\
&= \int_{\overline{D}} 2\nabla u \cdot \nabla h d\boldsymbol{x} \\
&= \int_{\overline{D}} 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_i} d\boldsymbol{x} \\
&= \int_{\overline{D}} 2 \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} h \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2} h \right\} d\boldsymbol{x} \\
&= 2 \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} h ds - 2 \int_{\overline{D}} \Delta u \cdot h d\boldsymbol{x} \\
&= -2 \int_{\overline{D}} \Delta u \cdot h d\boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$

この意味で $I'(u)=0$ であるとは、$\Delta u=0$ を満たすことだと考えられる。ちなみに、このような u を調和関数と呼ぶ。

$n\geq 2$ の一般次元の場合、調和関数は一次関数や定数関数とは限らない。$n=2$ の場合で言うと、複素解析で学ぶ正則関数の実部と虚部が、調和関数である。例えば z^2 の実部と虚部はそれぞれ x^2-y^2, $2xy$ であるが、これらのグラフは、いずれも鞍状の曲面となっている。

調和関数は一般に、境界 ∂D での値を決めると一意に定まり、内部 D では最大値や最小値をとらない(とってしまうと熱分布は定常状態とならない) などの性質が知られている。