幾何学特論A(幾何学講義II)・講義ノート

第２回

(2024年4月18日(木)配信分)

$\boxed{\text{§2. 測地線}}$

$D \subset \mathbf{R}^2$ は有界領域、$F : \overline{D} \to \mathbf{R}^3$ は C^2 級写像とする。
$F_x(x, y) \times F_y(x, y) \neq \mathbf{0}$ $(\forall (x, y) \in \overline{D})$ のとき、$M := F(\overline{D})$ は $\mathbf{R}^3$ 内の C^2 級曲面になる。

M 上の単位法ベクトル場は、次式により与えられる。

$$G(P) := \frac{1}{||F_x(x, y) \times F_y(x, y)||} F_x(x, y) \times F_y(x, y) \qquad (\forall P = F(x, y) \in M)$$

$G : M \to \mathbf{R}^3$ を M の Gauss 写像と呼ぶ。

$X:[a,b]\to M$ は曲面 M 上の C^2 級曲線の媒介変数表示とする。特に $||X'(t)||=1$ $(\forall t\in[a,b])$ すなわち弧長媒介変数表示を仮定しておく。曲線 X の弧長は次式で与えられる。

$$L(X) \; = \; \int_a^b ||X'(t)||dt = b-a$$

ここで、$X'(t), G(X(t))\times X'(t)$ は接平面 $T_{X(t)}M$ の正規直交基を、$G(X(t)), X'(t), G(X(t))\times X'(t)$ は接空間 $T_{X(t)}\mathbf{R}^3$ の正規直交基を、それぞれなすことに注意する。

M 上の曲線 $X(t)$ の測地曲率は次式で与えられる。

$$\sigma(t) \; := \; |G(X(t)), X'(t), X''(t)| \; = \; \langle G(X(t))\times X'(t), X''(t)\rangle$$

$P, Q \in M$ とし、
$X(t)$ は $X(a) = P$ と $X(b) = Q$ を結ぶ曲線とする。

$X(t)$ の変分として、C^2 級写像 $X : [a, b] \times (-\delta, \delta) \to M$ ($\delta > 0$) で、次の条件を満たすものを考える。

$$X(t, 0) = X(t) \qquad (\forall t \in [a, b]),$$

$$X(a, \epsilon) = X(a), \quad X(b, \epsilon) = X(b) \qquad (\forall \epsilon \in (-\delta, \delta))$$

このとき、特に次が成り立つ。

$$X_\epsilon(a, \epsilon) \ = \ X_\epsilon(b, \epsilon) = \mathbf{0} \qquad (\forall \epsilon \in (-\delta, \delta))$$

ϵ を固定するとき、$X(\cdot,\epsilon):[a,b]\to M$, $t\mapsto X(t,\epsilon)$ は $X=X(\cdot,0)$ と両端を同じくする C^2 級曲線で、その長さは次式で与えられる。

$$L(X(\cdot,\epsilon)) \ = \ \int_a^b ||X_t(t,\epsilon)||dt$$

さて、 $X=X(\cdot,0)$ が最短線のとき、$L(X(\cdot,\epsilon))$ の第一変分は消える、すなわち次が成り立つはずである。

$$\left.\frac{\partial}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0} L(X(\cdot,\epsilon)) \ = \ 0$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} L(X(\cdot,\epsilon)) &= \frac{\partial}{\partial\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} \int_a^b ||X_t(t,\epsilon)||dt \\
&= \int_a^b \frac{\partial}{\partial\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} \langle X_t(t,\epsilon), X_t(t,\epsilon)\rangle^{1/2} dt \\
&= \int_a^b \frac{1}{2}\langle X_t(t,\epsilon), X_t(t,\epsilon)\rangle^{-1/2} \cdot 2\langle X_{t\epsilon}(t,\epsilon), X_t(t,\epsilon)\rangle|_{\epsilon=0} dt \\
&= \int_a^b ||X'(t)||^{-1}\langle X_{t\epsilon}(t,0), X'(t)\rangle dt \\
&= \int_a^b \langle X_{\epsilon t}(t,0), X'(t)\rangle dt \\
&= \int_a^b \{\langle X_\epsilon(t,0), X'(t)\rangle_t - \langle X_\epsilon(t,0), X''(t)\rangle\} dt \\
&= \langle X_\epsilon(b,0), X'(b)\rangle - \langle X_\epsilon(a,0), X'(a)\rangle - \int_a^b \langle X_\epsilon(t,0), X''(t)\rangle dt \\
&= -\int_a^b \langle X_\epsilon(t,0), X''(t)\rangle dt
\end{aligned}
$$

$G(X(t)), X'(t), G(X(t)) \times X'(t)$ は $T_{X(t)}\mathbf{R}^3$ の正規直交基より、次が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
X''(t) &= \langle G(X(t)), X''(t)\rangle G(X(t)) + \langle X'(t), X''(t)\rangle X'(t) \\
&\qquad + \langle G(X(t)) \times X'(t), X''(t)\rangle G(X(t)) \times X'(t) \\
&= \langle G(X(t)), X''(t)\rangle G(X(t)) + 0 \cdot X'(t) + \sigma(t) G(X(t)) \times X'(t) \\
&= \langle G(X(t)), X''(t)\rangle G(X(t)) + \sigma(t) G(X(t)) \times X'(t)
\end{aligned}
$$

$X(t,\cdot)$ は M 上の曲線より、$X_\epsilon(t,0)\in T_{X(t)}M$ で、次が成り立つ。

$$\begin{aligned}\langle X_\epsilon(t,0), X''(t)\rangle &= \langle G(X(t)), X''(t)\rangle\langle X_\epsilon(t,0), G(X(t))\rangle \\ &\qquad +\sigma(t)\langle X_\epsilon(t,0), G(X(t))\times X'(t)\rangle \\ &= \langle G(X(t)), X''(t)\rangle\cdot 0+\sigma(t)\langle X_\epsilon(t,0), G(X(t))\times X'(t)\rangle \\ &= \sigma(t)\langle X_\epsilon(t,0), G(X(t))\times X'(t)\rangle\end{aligned}$$

よって、次を得る。

$$\left.\frac{\partial}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0} L(X(\cdot,\epsilon)) = -\int_a^b \sigma(t)\langle X_\epsilon(t,0), G(X(t))\times X'(t)\rangle dt$$

$\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}$ は C^0 級関数で、$\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, $\varphi(t) > 0$ $(\forall t \in (a, b))$ を満たすものとする。$X(t, \epsilon)$ として、$X_\epsilon(t, 0) = \varphi(t)\sigma(t)G(X(t)) \times X'(t)$ を満たすものをとれば、次が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} L(X(\cdot, \epsilon)) &= -\int_a^b \sigma(t) \cdot \varphi(t)\sigma(t)\langle G(X(t)) \times X'(t), G(X(t)) \times X'(t)\rangle dt \\
&= -\int_a^b \varphi(t)\sigma(t)^2 ||G(X(t)) \times X'(t)||^2 dt \\
&= -\int_a^b \varphi(t)\sigma(t)^2 dt
\end{aligned}$$

この積分の値は、$\varphi(t)$ の取り方によらず、一般に 0 以下であるから、選んだ変分により、測地曲率の符号と向きが一致するよう余法ベクトル場方向に変形すれば、曲線の長さが短くなる。

$\frac{\partial}{\partial\epsilon}|_{\epsilon=0}L(X(\cdot,\epsilon))=0$ であることは、$\varphi(t)\sigma(t)^2=0\ (\forall t\in[a,b])$ であることと同値であるから、結局 $\sigma(t)=0\ (\forall t\in[a,b])$ であることと同値になる。

測地曲率が恒等的に 0 である曲線を測地線と呼ぶ。$X(t,\epsilon)$ の選び方によらず、第一変分が 0 であることは、$\sigma(t) = |G(X(t)), X'(t), X''(t)| = 0$ （測地線の方程式）を満たすことと同値で、$X(t)$ が最短測地線のとき、これを満たすが、一般には最短とは限らない。

$X(t,\epsilon)$ が C^3 級のとき、$L(X(\cdot,\epsilon))$ の第二変分（二次微分係数）が >0 であれば、$X(t)$ は少なくとも $L(X)$ の極小値をとると判定できる。

これは端点が十分近ければＯＫである。すなわち、測地線は曲面上の少なくとも短い区間では最短距離を実現している曲線である。平面上の直線に相当するものである。