幾何学特論A(幾何学講義II)・講義ノート

$\boxed{\text{第３回}}$

(2024年4月25日(木)配信分)

§2. 測地線(続き)

曲面上の C^2 級曲線で、測地曲率が恒等的に 0 であるものを測地線と呼んだ。これは平面上の直線に相当するものであった。

球面上では大円（中心を通る平面による切り口）がこれにあたることが、常微分方程式

$$|G(X(t)), X'(t), X''(t)| = 0$$

を解くことによって示される。

特に単位球面のとき、Gauss 写像を外向きにとれば $G(X) = X$ なので、上の方程式は

$$|X(t), X'(t), X''(t)| = 0$$

となる。

以下、より一般に、単位球面上の曲線で測地曲率一定であるようなものは大円または小円に限ることを、微分方程式

$$|X(t), X'(t), X''(t)| = \sigma \quad \text{(定数)}$$

を具体的に解く（と言うより書き直す）ことで、示してみよう。

$X(t)$ は、$\mathbf{R}^3$ の原点を中心とする単位球面 $\mathbf{S}^2$ 上の C^2 級曲線で、t は弧長パラメーターとする。便宜上 t の動く範囲は0 を含むものとする。とりあえず、測地曲率 $\sigma(t)$ は一定でない場合も含めて公式を導く。

まず $\mathbf{S}^2$ 上にあることから、$||X(t)|| = 1\ (\forall t)$ より
$\langle X(t), X(t)\rangle = 0\ (\forall t)$ が成り立つので、両辺を微分して

$$\begin{aligned}0 &= \langle X(t), X(t)\rangle' \\ &= \langle X'(t), X(t)\rangle + \langle X(t), X'(t)\rangle \\ &= 2\langle X(t), X'(t)\rangle\end{aligned}$$

より

$$\langle X(t), X'(t)\rangle = 0$$

を得る。

さらにt が弧長パラメーターであることから、$||X'(t)|| = 1\ (\forall t)$ より

$$X(t),\ X'(t),\ X(t) \times X'(t)$$

は、$\mathbf{R}^3$ の点 $X(t)$ における接空間 $T_{X(t)}\mathbf{R}^3$ の右手系の正規直交基となる。

特に $\mathbf{S}^2$ においては、外側を表と見れば、Gauss 写像（外向き単位法ベクトル）が$G(X) = X$ により与えられるので、$X(t)$ と直交する

$$X'(t),\ X(t) \times X'(t)$$

が、$\mathbf{S}^2$ 上の点 $X(t)$ における接平面 $T_{X(t)}\mathbf{S}^2$ の左回りの正規直交基となる。

ここで

$$N(t) := X(t) \times X'(t)$$

とおく。$N(t)$ は $X(t)$ の進行方向左側の単位余法ベクトル（ $\mathbf{S}^2$ の接ベクトルで $X(t)$ の法ベクトルであるもの）である。$X(t)$, $X'(t)$, $N(t)$ が、右手系の正規直交基であることから、次が成り立つ。

$$\begin{aligned} X(t) &= X'(t) \times N(t) \\ X'(t) &= N(t) \times X(t) \end{aligned}$$

今、$\langle X(t), X'(t)\rangle = 0\ (\forall t)$ の両辺を微分して

$$\begin{aligned} 0 &= \langle X(t), X'(t)\rangle' \\ &= \langle X'(t), X'(t)\rangle + \langle X(t), X''(t)\rangle \\ &= 1 + \langle X(t), X''(t)\rangle \end{aligned}$$

より

$$\langle X(t), X''(t)\rangle = -1$$

を得、

$\langle X'(t), X'(t) \rangle = 0 \ (\forall t)$ の両辺を微分して

$$
\begin{aligned}
0 &= \langle X'(t), X'(t) \rangle' \\
&= \langle X''(t), X'(t) \rangle + \langle X'(t), X''(t) \rangle \\
&= 2\langle X'(t), X''(t) \rangle
\end{aligned}
$$

より

$$\langle X'(t), X''(t) \rangle = 0$$

を得る。

一方、$X(t)$ の測地曲率 $\sigma(t)$ の定義より

$$\begin{aligned}\langle N(t), X''(t)\rangle &= \langle X(t) \times X'(t), X''(t)\rangle \\ &= \sigma(t)\end{aligned}$$

も成り立つので、

$$\begin{aligned}X''(t) &= -1 \cdot X(t) + 0 \cdot X'(t) + \sigma(t)N(t) \\ &= -X(t) + \sigma(t)N(t)\end{aligned}$$

を得る。

さらに

$$
\begin{aligned}
N'(t) &= (X(t) \times X'(t))' \\
&= X'(t) \times X'(t) + X(t) \times X''(t) \\
&= \mathbf{0} + X(t) \times (-X(t) + \sigma(t)N(t)) \\
&= -X(t) \times X(t) + \sigma(t)X(t) \times N(t) \\
&= -\mathbf{0} - \sigma(t)N(t) \times X(t) \\
&= -\sigma(t)X'(t)
\end{aligned}
$$

も得る。

以上まとめると、S^2 上の曲線に関するFrenet-Serret 型の公式が得られる。

$$(X(t)\ X'(t)\ N(t))' = (X(t)\ X'(t)\ N(t)) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -\sigma(t) \\ 0 & \sigma(t) & 0 \end{pmatrix}$$

さて、今

$$
\begin{aligned}
X'(t) \times X''(t) &= X'(t) \times (-X(t) + \sigma(t)N(t)) \\
&= -X'(t) \times X(t) + \sigma(t)X'(t) \times N(t) \\
&= X(t) \times X'(t) + \sigma(t)X(t) \\
&= \sigma(t)X(t) + N(t)
\end{aligned}
$$

より、

$$
X'(t) \times X''(t) \neq \mathbf{0} \quad (\forall t)
$$

である。

さらに、

$$
\begin{aligned}
(X'(t) \times X''(t))' &= (\sigma(t)X(t) + N(t))' \\
&= \sigma'(t)X(t) + \sigma(t)X'(t) + N'(t) \\
&= \sigma'(t)X(t) + \mathbf{0} \\
&= \sigma'(t)X(t)
\end{aligned}
$$

なので、測地曲率一定の曲線においては$\sigma'(t) = 0\ (\forall t)$ より

$$
(X'(t) \times X''(t))' = \mathbf{0} \quad (\forall t)
$$

すなわち $X'(t) \times X''(t)$ は定数ベクトルである。

以下、一定である測地曲率を σ と書けば、

$$
\begin{aligned}
\langle X(t), X'(0) \times X''(0) \rangle &= \langle X(t), X'(t) \times X''(t) \rangle \\
&= |X(t)\ X'(t)\ X''(t)| \\
&= \langle X(t) \times X'(t), X''(t) \rangle \\
&= \sigma
\end{aligned}
$$

より、$X(t)$ は $X'(0) \times X''(0)$ を法ベクトルとするある平面 Π 上を動く。すなわち、単位球面 S^2 をこの平面 Π で切った切り口に現れる円周上を動く。

ここで $X'(0) \times X''(0) = \sigma X(0) + N(0)$ より

$$||X'(0) \times X''(0)|| = \sqrt{\sigma^2 + 1}$$

であるから

$$V := \frac{1}{\sqrt{\sigma^2+1}} X'(0) \times X''(0) = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2+1}} (\sigma X(0) + N(0))$$

は単位ベクトルであり、

$$\langle X(t), V \rangle = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2+1}}$$

より、Π と原点との距離は $\dfrac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2+1}}$ であると判る。

特に $\sigma = 0$ のとき、かつこのときに限り、この距離は 0 となり、Π は原点を通り、切り口は大円となる。

一般に、原点から Π に下した垂線の足は

$$\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2+1}}V = \frac{\sigma}{\sigma^2+1}(\sigma X(0)+N(0))$$

で与えられる。そこで

$$Y(t) := X(t) - \frac{\sigma}{\sigma^2+1}(\sigma X(0)+N(0))$$

とおけば、

$$\begin{aligned} Y(t) &= X(t) - \frac{\sigma}{\sigma^2+1}(\sigma X(t)+N(t)) \\ &= \frac{1}{\sigma^2+1}(X(t)-\sigma N(t)) \end{aligned}$$

であり、さらに

$$
\begin{aligned}
Y''(t) &= X''(t) \\
&= -X(t) + \sigma N(t) \\
&= -(X(t) - \sigma N(t)) \\
&= -(\sigma^2 + 1)Y(t)
\end{aligned}
$$

より、$X(t)$ が、垂線の足

$$
\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2+1}}V = \frac{\sigma}{\sigma^2+1}(\sigma X(0) + N(0))
$$

を中心とし、半径 $\dfrac{1}{\sqrt{\sigma^2+1}}$ の円運動であることも判る。

$\sigma = 0$ なら、この半径は確かに 1 であり（大円）、それ以外のときは 1 より小さい（小円）。

大円は測地線であり、球面上を半周するまでは最短線でもあるが、半周を超えると最短線ではなくなる。

次に、xy-平面上の曲線 $y = f(x)$ を、y-軸と平行で半径 1 の直円柱上に巻き付けてできる空間曲線

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ f(t) \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbf{R})$$

の、直円柱上の曲線としての測地曲率は、xy-平面上の曲線 $y = f(x)$ の曲率（の絶対値）と一致することを確かめてみよう。

t は弧長パラメーターではないので、まず測地曲率の定義を、弧長でないパラメーターに書き換える。

s を $X(t)$ の弧長パラメーターとする。このとき $\dfrac{ds}{dt} = ||X'(t)||$ より

$$
\begin{aligned}
\frac{dt}{ds} &= \frac{1}{||X'(t(s))||} \\
\frac{d^2t}{ds^2} &= \frac{d}{ds}\left(\frac{dt}{ds}\right) \ = \ \frac{dt}{ds}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\frac{ds}{dt}}\right) \ = \ \frac{1}{\frac{ds}{dt}} \cdot \frac{-\frac{d^2s}{dt^2}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2} \ = \ \frac{-\frac{d^2s}{dt^2}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3} \\
&= \frac{-\frac{d}{dt}(\langle X'(t), X'(t)\rangle^{1/2})}{||X'(t)||^3} \\
&= \frac{-\frac{1}{2}\langle X'(t), X'(t)\rangle^{-1/2} \cdot 2\langle X'(t), X''(t)\rangle}{||X'(t)||^3} \\
&= \frac{-\langle X'(t(s)), X''(t(s))\rangle}{||X'(t(s))||^4}
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

よって

$$
\begin{aligned}
X_s &= \frac{dt}{ds} X'(t(s)) \;=\; \frac{X'(t(s))}{||X'(t(s))||} \\
X_{ss} &= \frac{d^2 t}{ds^2} X'(t(s)) + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 X''(t(s)) \\
&= \frac{||X'(t(s))||^2 X''(t(s)) - \langle X'(t(s)), X''(t(s))\rangle X'(t(s))}{||X'(t(s))||^4}
\end{aligned}
$$

なので、測地曲率は

$$
|G(X(t(s))), X_s, X_{ss}| = \frac{|G(X(t)), X'(t), X''(t)|}{||X'(t)||^3}
$$

となる。

　$X(t) = {}^t(\cos t, \sin t, f(t))$ の Gauss 写像を外向きにとれば $G(X(t)) = {}^t(\cos t, \sin t, 0)$ で、これを上で求めた公式に代入すれば

$$||X'(t)||^2 = 1 + f'(t)^2$$
$$|G(X(t)), X'(t), X''(t)| = f''(t)$$

より

$$\frac{|G(X(t)), X'(t), X''(t)|}{||X'(t)||^3} = \frac{f''(t)}{(1 + f'(t)^2)^{3/2}}$$

で、確かに $y = f(x)$ の曲率と一致する。

　一方、 Gauss 写像を内向きにとれば、測地曲率は -1 倍となるが、絶対値は一致する。

M は $\mathbf{R}^3$ 内の曲面、G は M の Gauss 写像、Π は $\mathbf{R}^3$ 内の平面で、M と交わるものとし、$X(t)$ は曲面 M を平面 Π で切った切り口に現れる曲線を弧長パラメーター表示したものとする。$G(X(t))//\Pi\ (\forall t)$ のとき、$X(t)$ は M 上の測地線であることを示してみよう。

平面 Π と平行なベクトル空間を Π_0 とすると、曲線 $X(t)$ は Π 上の曲線なので、

$$\frac{X(t+h)-X(t)}{h} \in \Pi_0 \quad (h \neq 0)$$

より $X'(t) \in \Pi_0$ が成り立つ。さらに同様に $X''(t) \in \Pi_0$ も成り立つ。

一方、仮定より $G(X(t)) \in \Pi_0$ なので、$G(X(t))$, $X'(t)$, $X''(t)$ は一次従属となり、$|G(X(t)), X'(t), X''(t)| = 0$ である。

球面における大円は、これの特別な場合である。