

幾何学特論A(幾何学講義II)・講義ノート

第4回

(2024年5月9日(木)配信分)

§2. 測地線(続き)

Gauss 曲率が正である球面については、平面とは異なる性質をある程度思い浮かべることができるだろう。一方、Gauss 曲率が負である双曲平面については、よく見知った空間の中で実現させることはできない。双曲平面について、何とかもう少し詳しく見てみよう。

とりあえず、話は遠い昔にさかのぼる。Euclid はその著書「原論」（共立出版から翻訳が出ている）の中で、「1 直線が 2 直線に交わり同じ側の内角の和を 2 直角より小さくするならば、この 2 直線は限りなく延長されると 2 直角より小さい角のある側において交わること」を第 5 公準として証明を与えることなく要請し、これからの帰結として、「与えられた点を通り、与えられた直線に平行線をひくこと」が可能であることを示した。さらに詳しく見ると、この平行線がただ 1 本に限ることも、同じ仮定の下で導かれる。これが世に言う平行線の公理である。

実は第5公準は証明できない。より厳密に言うと、他の仮定に置き換えても、矛盾を引き起こさないことが知られている。平行線の言葉で述べれば、同じ点を通る平行線は1本ではなく0本でも2本以上でも特に困らないと言うことである。ただし、異なる二直線が互いに接することはないと認めれば、2本以上のときはその間にひいた直線も全て平行線となるので、結局平行線は ∞ 本と言うことになってしまう。

実際には、私達が知っている距離と角度が定められた通常の平面では、平行線は1本ずつであって、そのことに誤りはない。それはしかし、距離や角度はこのように決まっているものと決めてかかっている、そんな勝手な仮定からの帰結でしかない。

現実にはこの大地は球面上にあるのであって、従って直線と
思っているものは、実は大円であったりする。球面の半径が大き
ければ大きいほど、曲率は0に近いので、曲がり具合がもたらす
結果は、測定誤差の範囲内に収まってしまい、曲がっているか
ないか判定するのは困難になる。それに、そもそも定曲率である
と仮定する事自体無理があるかもしれないのである。

従って、数学では矛盾のない可能性は、全て検討しようと言う
ことになる。

私達が直感的に直線と思っているのは、最短距離を行く道筋の
ことで、一般の曲面上では測地線と呼ばれる曲線である。

球面においては、測地線＝大円であることも既に述べた。任意の二つの大円は必ず交わるので、球面は平行線が 0 本の世界である。そこでの二点間の距離はそれらを結ぶ大円弧の弧長であり、単位球面の場合、二点のなす中心角そのものに等しい。この距離を保存する、向きを変えない合同変換は、 $X \mapsto PX$ ($P \in SO(3)$) である。(これらの変換が距離を保存していることは、直交行列が内積を保存することから、直ちに従う。)

平面においては、言うまでもなく測地線＝直線であり、平行線は1本の世界である。通常距離を保存する、向きを変えない合同変換は、 $X \mapsto PX + X_0$ ($P \in SO(2), X_0 \in \mathbf{R}^2$) である。ここで任意の $P \in SO(2)$ は、

$$P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

と書けたことを思い出しておこう。 PX の部分が原点中心の回転を、 $+X_0$ の部分が平行移動を表している。(これらの変換は距離を保存している。)

さて、問題の双曲平面が実は平行線 ∞ 本の世界なのである。これを地図に描くことで表してみよう。距離は適当に縮めることにして、しかし角度は変えない等角写像による地図で、通常よく用いられるのは、単位円板（Poincaré disc）モデルと上半平面モデルである。ここでは上半平面モデルを用いよう。

複素平面の上半平面 $H = \{x + yi \in \mathbf{C} \mid y > 0\}$ を考える。実軸は $+\infty$ と $-\infty$ でつながっていて、一周して無限遠の境界のようなものになっていると考える。

さて、上半平面モデルにおいて、双曲平面上の線積分は一般に

$$\int_{t_0}^{t_1} f(z(t)) \frac{|z'(t)|}{y(t)} dt, \quad |z'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$$

で与えられる。特に曲線の長さは、 $f \equiv 1$ として計算すればよい。すると実は、測地線＝実軸と直交する半直線または半円になる。半円が測地線となるのはおかしいと思うかもしれないが、これはあくまで無限遠まで無理に押し込めた地図上のゆがみであって、実際にはこれらがまっすぐに伸びているのである。一方、実軸と直交しない直線は、実は曲がっているということになる。

説明はいろいろ面倒なので、ここではこれは受け入れることとし、これを用いて、任意の二点間の距離を求めてみよう。

実部が異なる二点 z_0, z_1 を結ぶ測地線は半円であるから、適当な実数 p と正の実数 r を選べば、

$$z(\theta) = p + r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad z_0 = z(\theta_0), \quad z_1 = z(\theta_1)$$

と表せる。

$$z'(\theta) = r(-\sin \theta + i \cos \theta), \quad |z'(\theta)| = r$$

であるから、二点間の距離は、

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{d\theta}{\sin \theta} = \left[\log \tan \frac{\theta}{2} \right]_{\theta_0}^{\theta_1} = \log \frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_0/2)}$$

で与えられる。この値が偏角のみで決まっていて、中心の位置はもちろん、半径にもよらないことに注意しよう。このことは、横の平行移動と、実軸に中心を持つ相似拡大（または縮小）が合同変換であることを示唆している。（後で確かめる。）

一方、実部が同じ二点 z_0, z_1 を結ぶ測地線は垂直な半直線であって、

$$z(t) = x_0 + it, \quad z_0 = z(y_0), \quad z_1 = z(y_1)$$

と表せる。

$$z'(t) = i, \quad |z'(t)| = 1$$

であるから、二点間の距離は、

$$\int_{y_0}^{y_1} \frac{dt}{t} = [\log t]_{y_0}^{y_1} = \log \frac{y_1}{y_0}$$

で与えられる。この値も横の平行移動と、実軸に中心を持つ相似拡大（または縮小）で変わらない。これらは任意の二点間の距離（と角度）を保つので、結局 $z \mapsto az + b$ ($a, b \in \mathbf{R}, a > 0$) が合同変換であることがわかった。

上半平面モデルの合同変換はこれらだけではない。一次分数変換

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbf{R}, ad - bc > 0)$$

を考えてみよう。

一般に一次分数変換は、等角写像でありかつ、複素平面上の直線または円を直線または円に写す。このことは複素解析学において学んだので、ここではそれは認める。

上の一次分数変換は、実数係数であることから、実数または ∞ を実数または ∞ に写し、さらに $ad - bc > 0$ より、虚部

$$\frac{(ad - bc)y}{|cz + d|^2}$$

は符号を変えないので、 H を H に写す。角度を変えないことから、測地線を測地線に写すこともわかる。実はこれらが、向きを保つ合同変換となるのである。

特に i を中心とする回転を、具体的に求めてみよう。これは i を i 自身に写すので

$$\frac{ai + b}{ci + d} = i$$

より $(b + c) + (a - d)i = 0$ であるが、 a, b, c, d は全て実数なので、 $c = -b, d = a$ を得る。

従って

$$z \mapsto \frac{az + b}{-bz + a} \quad (a, b \in \mathbf{R}, a^2 + b^2 > 0)$$

となるが、これが左回り θ の回転を表すとすると、虚軸は i を通り、中心が $-\cot \theta$ の半円に写る。その半径は $\sqrt{1 + \cot^2 \theta} = 1/|\sin \theta|$ であるから、実軸との交点の内、原点 0 の写る先は、

$$\frac{1}{\sin \theta} - \cot \theta = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \tan \frac{\theta}{2}$$

である。よって、

$$\frac{b}{a} = \frac{a \cdot 0 + b}{-b \cdot 0 + a} = \tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)}$$

ここで a, b の非零実定数倍は結局同じ変換を与えるので、

$$a = \cos \frac{\theta}{2}, \quad b = \sin \frac{\theta}{2}$$

ととってよい。よって、 i を中心とする左回り θ 回転は、

$$z \mapsto \frac{\cos(\theta/2)z + \sin(\theta/2)}{-\sin(\theta/2)z + \cos(\theta/2)} \quad (\theta \in \mathbf{R})$$

で与えられることがわかった。

この回転により、虚軸がある半円に写る一方で、その半円と虚軸について対称な位置にあった半円が、虚軸に写って来る。

ここで求めた回転は、自明な場合を除き、実軸及び ∞ は全て動かす合同変換である。一方、 $z \mapsto z + b$ は ∞ のみ固定する合同変換、 $z \mapsto az$ は ∞ と 0 を固定する合同変換で、いずれも内部の点は全て動かす。

先に、実軸と直交しない半直線は実は曲がっていると言ったが、このことは次のようにして確かめられる。まず、この半直線上の任意の点において、そこで接する測地線をひく。この半直線は傾いているので、この測地線は半円である。この半円がまっすぐに見えるよう、垂直な半直線に写るような回転を施す。すると、先の半直線は、同じ角度で実軸と交わり、垂直な半直線に接する円弧に写るのである。

さて、一般の一次分数変換

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbf{R}, ad - bc > 0)$$

に対し、

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{ad - bc}{c^2 + d^2} \frac{dz - c}{cz + d} + \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}$$

と書ける。ここで $ad - bc > 0$ より、 c と d は同時に 0 にはならないので、これで一般の場合が典型的な三つの合同変換の合成でかけたことになる。