幾何学特論A(幾何学講義II)・講義ノート

$\boxed{\text{第5回}}$

(2024年5月16日(木)配信分)

$\boxed{\text{§3. 等周問題}}$

$X : [a,b] \to \mathbf{R}^2$ は平面 $\mathbf{R}^2$ 上の自己交差の無い C^2 級閉曲線の媒介変数表示とする。閉曲線の大前提として、

$$X(a) = X(b), \quad X'(a) = X'(b)$$

を満たし、さらに特に

$$||X'(t)|| = 1 \qquad (\forall t \in [a,b])$$

すなわち弧長媒介変数表示であることを仮定しておく。

閉曲線 $X([a,b])$ の弧長は次式で与えられる。

$$L(X) \ = \ \int_a^b ||X'(t)||dt = b - a$$

ここで、$X'(t), N(t)$ は接平面 $T_{X(t)}\mathbf{R}^2$ (としばしば同一視される $\mathbf{R}^2$) の正規直交基をなすことに注意する。$X([a,b])$ が囲む図形の面積は次式で与えられる。

$$A(X) \;=\; -\frac{1}{2}\int_a^b \langle X(t), N(t)\rangle dt \;=\; \frac{1}{2}\int_a^b |X(t), X'(t)| dt$$

また $X(t)$ の曲率は次式で与えられる。

$$\sigma(t) \;:=\; \langle X''(t), N(t)\rangle \;=\; |X'(t), X''(t)|$$

$X(t)$ の変分として、C^2 級写像 $X : [a,b] \times (-\delta, \delta) \to \mathbf{R}^2$ $(\delta > 0)$ で、次の条件を満たすものを考える。

$$X(t, 0) = X(t) \qquad (\forall t \in [a,b]),$$

$$X(a, \epsilon) = X(b, \epsilon), \quad X_t(a, \epsilon) = X_t(b, \epsilon) \qquad (\forall \epsilon \in (-\delta, \delta))$$

このとき、特に次が成り立つ。

$$X_\epsilon(a, \epsilon) \ = \ X_\epsilon(b, \epsilon) \qquad (\forall \epsilon \in (-\delta, \delta))$$

ϵ を固定するとき、$X(\cdot,\epsilon):[a,b]\to\mathbf{R}^2$, $t\mapsto X(t,\epsilon)$ もまた C^2 級閉曲線(一般に弧長媒介変数表示とは限らない) で、その長さは次式で与えられる。

$$L(X(\cdot,\epsilon)) \ = \ \int_a^b ||X_t(t,\epsilon)||dt$$

また $X([a,b]\times\{\epsilon\})$ が囲む図形の面積は次式で与えられる。

$$A(X(\cdot,\epsilon)) \ = \ \frac{1}{2}\int_a^b |X(t,\epsilon),X_t(t,\epsilon)|dt$$

さて、$X([a,b])=X([a,b]\times\{0\})$ が、その囲む面積一定と言う条件下で最短線のとき、$L(X(\cdot,\epsilon))$ の条件付第一変分は消える、すなわち次が成り立つはずである。

$$\left.\frac{\partial}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\{L(X(\cdot,\epsilon))-\lambda(A(X(\cdot,\epsilon))-A_0)\} \ = \ 0$$

ここで λ は変分に依らない(未定)定数、$A_0=A(X(\cdot,0))$ である。

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} L(X(\cdot,\epsilon)) &= \left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \int_a^b ||X_t(t,\epsilon)||dt \\
&= \int_a^b \left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \langle X_t(t,\epsilon), X_t(t,\epsilon)\rangle^{1/2} dt \\
&= \int_a^b \frac{1}{2}\langle X_t(t,\epsilon), X_t(t,\epsilon)\rangle^{-1/2} \cdot 2\langle X_{t\epsilon}(t,\epsilon), X_t(t,\epsilon)\rangle|_{\epsilon=0} dt \\
&= \int_a^b ||X'(t)||^{-1}\langle X_{t\epsilon}(t,0), X'(t)\rangle dt \\
&= \int_a^b \langle X_{\epsilon t}(t,0), X'(t)\rangle dt \\
&= \int_a^b \{\langle X_\epsilon(t,0), X'(t)\rangle_t - \langle X_\epsilon(t,0), X''(t)\rangle\} dt \\
&= \langle X_\epsilon(b,0), X'(b)\rangle - \langle X_\epsilon(a,0), X'(a)\rangle - \int_a^b \langle X_\epsilon(t,0), X''(t)\rangle dt \\
&= -\int_a^b \langle X_\epsilon(t,0), X''(t)\rangle dt
\end{aligned}
$$

(ここまでの計算は §2 と基本的に同様であるが、下から 2 行目の第 1 項と第 2 項が消える理由は異なる。)

ここで $X''(t) = \sigma(t)N(t)$ より次を得る。

$$\left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} L(X(\cdot,\epsilon)) = -\int_a^b \sigma(t)\langle X_\epsilon(t,0), N(t)\rangle dt$$

一方、

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} A(X(\cdot,\epsilon)) &= \frac{1}{2}\ \frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} \int_a^b |X(t,\epsilon), X_t(t,\epsilon)| dt \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b \frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} |X(t,\epsilon), X_t(t,\epsilon)| dt \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b \{ |X_\epsilon(t,\epsilon), X_t(t,\epsilon)| + |X(t,\epsilon), X_{t\epsilon}(t,\epsilon)| \} |_{\epsilon=0} dt \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b \{ |X_\epsilon(t,0), X'(t)| + |X(t), X_{t\epsilon}(t,0)| \} \, dt \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b \{ |X_\epsilon(t,0), X'(t)| + |X(t), X_{\epsilon t}(t,0)| \} \, dt \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b \{ |X_\epsilon(t,0), X'(t)| + |X(t), X_\epsilon(t,0)|_t - |X'(t), X_\epsilon(t,0)| \} \, dt \\
&= \frac{1}{2} \{ |X(b), X_\epsilon(b,0)| - |X(a), X_\epsilon(a,0)| \} + \int_a^b |X_\epsilon(t,0), X'(t)| dt \\
&= \int_a^b |X_\epsilon(t,0), X'(t)| dt \\
&= -\int_a^b \langle X_\epsilon(t,0), N(t) \rangle dt
\end{aligned}
$$

よって、次を得る。

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\{L(X(\cdot,\epsilon))-\lambda(A(X(\cdot,\epsilon))-A_0)\}\\
&\qquad = -\int_a^b(\sigma(t)-\lambda)\langle X_\epsilon(t,0),N(t)\rangle dt
\end{aligned}$$

そこで $X(t,\epsilon)$ として、

$$X_\epsilon(t,0)=(\sigma(t)-\lambda)N(t)$$

を満たすものをとれば、次が成り立つ。

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\{L(X(\cdot,\epsilon))-\lambda(A(X(\cdot,\epsilon))-A_0)\}\\
&\qquad = -\int_a^b(\sigma(t)-\lambda)^2\langle N(t),N(t)\rangle dt\\
&\qquad = -\int_a^b(\sigma(t)-\lambda)^2 dt
\end{aligned}$$

この積分の値は、一般に 0 以下であるから、ちょうど 0 でない限り、選んだ変分により変形すれば、曲線の長さが短くなる。

$$\left.\frac{\partial}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\{L(X(\cdot,\epsilon))-\lambda(A(X(\cdot,\epsilon))-A_0)\} \;=\; 0$$

であることは、

$$(\sigma(t)-\lambda)^2=0 \qquad (\forall t\in[a,b])$$

であることと同値であるから、結局、最短線においては

$$\sigma(t)=\lambda \qquad (\forall t\in[a,b])$$

が成り立つ。