# 幾何学特論A(幾何学講義II)・講義ノート

$\boxed{\text{第６回}}$

(2024年5月23日(木)配信分)

§3. 等周問題(続き)

　今回と次回については、楠見直之氏の卒業研究発表(2020年2月14日)を参考にした。なお、表記は概ね原論文に合わせており、この講義でこれまで用いて来たものとは異なる場合があるので注意すること。

　さて、前回の考察から得られたのは、同じ面積を囲む最短の閉曲線は円周であると言うことである。この事実は、しばしば、次のように言い換えて表される。

## 等周不等式(Steiner 19 世紀)

$\mathbf{R}^2$ 内の $C^2$ 級単純閉曲線 $C$ に対し、その長さを $L_C$ で、囲む閉領域の面積を $A_C$ で、それぞれ表すとき、次の不等式が成り立つ。

$$ {L_C}^2 \geq 4\pi A_C $$

特に、等号が成立するのは $C$ が円周のときに限る。

その後、この不等式は、高次元化はもちろん、それ以外のさまざまな状況へと一般化されて来たのであるが、近年もなお、その原型についての精密化に関する研究が発表されている。

## 改良版等周不等式(Zwierzyński 2016)

$\mathbf{R}^2$ 内の $C^2$ 級卵形線 $C$ に対し、$C$ のWigner 焦線を $E_{\frac{1}{2}}(C)$ で、$E_{\frac{1}{2}}(C)$ が囲む向き付けられた面積を $\tilde{A}_{E_{\frac{1}{2}}(C)}$ で、それぞれ表すとき、次の不等式が成り立つ。

$$L_C{}^2 \geq 4\pi A_C + 8\pi|\tilde{A}_{E_{\frac{1}{2}}(C)}|$$

特に、等号が成立するのは $C$ が定幅曲線のときに限る。

まず、赤字の用語について説明する。なお、教科書等に見当たらない用語については、訳語は便宜上適当に与えたものであり、今後一般的となるとは限らない。

文献によって定義にばらつきがあるが、この講義では、$C^2$ 級狭義凸閉曲線のことを卵形線(oval) と呼ぶこととする。

卵形線の２点 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ で、それらの点における接線が平行である対を平行対(parallel pair) と呼ぶ。

卵形線 $C$ の平行対の中点の軌跡をWigner 焦線(Wigner caustic) と呼び、$E_{\frac{1}{2}}(C)$ で表す。すなわち

$$E_{\frac{1}{2}}(C) := \left\{ \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \;\middle|\; \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \text{ は } C \text{ の平行対} \right\}$$

である。

平行な接線の幅が一定である卵形線を定幅曲線(curve of constant width) と呼ぶ。

卵形線 $C$ の内部に原点 $O$ をとり、$C$ 上の各点に対し、$O$ からその点における接線に下した垂線の$x_1$-軸正方向に対してなす角を $\theta$ で、長さを $p(\theta)$ で、それぞれ表す。$(\theta, p(\theta))$ を $C$ 上の接線極座標(polar tangential coordinate) と呼び、$p(\theta)$ を $C$ の Minkowski の台関数(Minkowski's support function) と呼ぶ。

接線極座標による $C$ の媒介変数表示は、次で与えられる。

$$
\begin{aligned}
\gamma(\theta) &= (\gamma_1(\theta), \gamma_2(\theta)) \\
&= (p(\theta)\cos\theta - p'(\theta)\sin\theta, p(\theta)\sin\theta + p'(\theta)\cos\theta)
\end{aligned}
$$

また $C$ の(内向き)単位法ベクトル(場)は

$$N(\theta) = (-\cos\theta, -\sin\theta)$$

で、$C$ の曲率は

$$\kappa(\theta) = \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{p(\theta) + p''(\theta)} > 0$$

で、$C$ の曲率半径は

$$\rho(\theta) = \frac{ds}{d\theta} = p(\theta) + p''(\theta) > 0$$

で、それぞれ表される。ここで、 $s$ は $C$ の弧長媒介変数である。

以下、上の公式をまとめて示す。まず

$$\gamma_s = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

であること、及び $\gamma_s$, $N$ が$T_{\gamma(\theta)}\mathbf{R}^2$ の正規直交基をなすことに注意する。

特に$\langle \gamma_s, N \rangle = 0$ より

$$\begin{aligned}
\kappa &= \frac{d\theta}{ds} \\
&= \langle \gamma_{ss}, N \rangle \\
&= \langle \gamma_s, N \rangle_s - \langle \gamma_s, N_s \rangle \\
&= 0 - \langle \gamma_s, N_s \rangle \\
&= -\langle \gamma_s, N_s \rangle
\end{aligned}$$

ここで $p(\theta) = -\langle \gamma, N \rangle$, $\langle \gamma_s, N \rangle = 0$, $\langle N_s, N \rangle = 0$ より

$$
\begin{aligned}
p'(\theta) &= -\frac{ds}{d\theta}\langle \gamma, N \rangle_s \\
&= -\frac{1}{\kappa}(\langle \gamma_s, N \rangle + \langle \gamma, N_s \rangle) \\
&= -\frac{1}{\kappa}(0 + \langle \gamma, \gamma_s \rangle \langle N_s, \gamma_s \rangle + \langle \gamma, N \rangle \langle N_s, N \rangle) \\
&= -\frac{1}{\kappa}\{\langle \gamma, \gamma_s \rangle (-\kappa) + (-p(\theta)) \cdot 0\} \\
&= \langle \gamma, \gamma_s \rangle
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
\gamma &= \langle \gamma, \gamma_s \rangle \gamma_s + \langle \gamma, N \rangle N \\
&= p'(\theta)\gamma_s - p(\theta)N
\end{aligned}
$$

を得る。

さらに $\langle \gamma_s, \gamma_s \rangle = 1$, $\langle \gamma_{ss}, \gamma_s \rangle = 0$ より

$$
\begin{aligned}
p''(\theta) &= (p'(\theta))' \\
&= \frac{ds}{d\theta} \langle \gamma, \gamma_s \rangle_s \\
&= \frac{1}{\kappa} (\langle \gamma_s, \gamma_s \rangle + \langle \gamma, \gamma_{ss} \rangle) \\
&= \frac{1}{\kappa} (1 + \langle \gamma, \gamma_s \rangle \langle \gamma_{ss}, \gamma_s \rangle + \langle \gamma, N \rangle \langle \gamma_{ss}, N \rangle) \\
&= \frac{1}{\kappa} \{1 + p'(\theta) \cdot 0 + (-p(\theta))\kappa\} \\
&= \frac{1}{\kappa} - p(\theta)
\end{aligned}
$$

よって

$$
\frac{1}{\kappa} = p(\theta) + p''(\theta)
$$

を得る。

さらに $C$ の長さは

$$
\begin{aligned}
L_C &= \int_C ds \\
&= \int_0^{2\pi} \rho(\theta) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (p(\theta) + p''(\theta)) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} p(\theta) d\theta + [p'(\theta)]_0^{2\pi} \\
&= \int_0^{2\pi} p(\theta) d\theta \qquad (\because \ p'(\theta) \text{ の周期性より})
\end{aligned}
$$

( Cauchy の公式)

で、$C$ の囲む面積は

$$
\begin{aligned}
A_C &= \frac{1}{2}\int_C p(\theta)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_C \gamma_1 d\gamma_2 - \gamma_2 d\gamma_1 \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (p(\theta)\cos\theta - p'(\theta)\sin\theta)d(p(\theta)\sin\theta + p'(\theta)\cos\theta) \\
&\qquad\qquad -(p(\theta)\sin\theta + p'(\theta)\cos\theta)d(p(\theta)\cos\theta - p'(\theta)\sin\theta) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (p(\theta)\cos\theta - p'(\theta)\sin\theta)(p(\theta) + p''(\theta))\cos\theta \\
&\qquad\qquad -(p(\theta)\sin\theta + p'(\theta)\cos\theta)(-p(\theta) - p''(\theta))\sin\theta d\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(p(\theta)^2 + p(\theta)p''(\theta)\right) d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left\{p(\theta)^2 + (p(\theta)p'(\theta))' - p'(\theta)^2\right\} d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(p(\theta)^2 - p'(\theta)^2\right) d\theta + \left[p(\theta)p'(\theta)\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(p(\theta)^2 - p'(\theta)^2\right) d\theta \qquad (\because\ p(\theta)p'(\theta) \text{ の周期性より})
\end{aligned}
$$

( Blaschke の公式)

で、それぞれ与えられる。

ここで、$C$ の Minkowski の台関数は、周期 $2\pi$ なので、次の形に Fourier 級数展開可能である。

$$
\begin{aligned}
p(\theta) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \\
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(\theta)d\theta \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} p(\theta)\cos n\theta d\theta \qquad (n \in \mathbf{N}) \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} p(\theta)\sin n\theta d\theta \qquad (n \in \mathbf{N})
\end{aligned}
$$

( $a_0$ の定義が通常の $1/2$ であるが、ここでは原論文に従う。)

このとき、次も成り立つ。

$$p'(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n(-a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta)$$

$$p''(\theta) = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n \cos \theta + b_n \sin n\theta)$$

この係数を用いると、$C$ の長さは

$$L_C = \int_0^{2\pi} p(\theta) d\theta \ = \ 2\pi a_0$$

で、$C$ の囲む面積は

$$\begin{aligned}
A_C &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(p(\theta)^2 - p'(\theta)^2\right)d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left[2\pi {a_0}^2 + \pi\sum_{n=1}^{\infty}\left({a_n}^2 + {b_n}^2\right) - \pi\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(nb_n)^2 + (-na_n)^2\right\}\right] \\
&\qquad\qquad (\because \text{ Parseval の等式より}) \\
&= \pi {a_0}^2 - \frac{\pi}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(n^2-1)({a_n}^2 + {b_n}^2)
\end{aligned}$$

で、それぞれ表される。

一方、今 $C$ において、各 $\theta$ に対し、$\gamma(\theta)$ と $\gamma(\theta+\pi)$ が平行対なので、$C$ の Wigner 焦線 $E_{\frac{1}{2}}(C)$ の媒介変数表示は、次で与えられる。

$$
\begin{aligned}
\gamma_{\frac{1}{2}}(\theta) &= (\gamma_{\frac{1}{2},1}(\theta), \gamma_{\frac{1}{2},2}(\theta)) \\
&= \frac{1}{2}(\gamma(\theta)+\gamma(\theta+\pi)) \\
&= \frac{1}{2}\{(p(\theta)\cos\theta - p'(\theta)\sin\theta, p(\theta)\sin\theta + p'(\theta)\cos\theta) \\
&\qquad +(-p(\theta+\pi)\cos\theta + p'(\theta+\pi)\sin\theta, \\
&\qquad\qquad -p(\theta+\pi)\sin\theta - p'(\theta+\pi)\cos\theta)\} \\
&= \frac{1}{2}\{(p(\theta)-p(\theta+\pi))\cos\theta - (p'(\theta)-p'(\theta+\pi))\sin\theta, \\
&\qquad (p(\theta)-p(\theta+\pi))\sin\theta + (p'(\theta)-p'(\theta+\pi))\cos\theta)\}
\end{aligned}
$$

ここで

$$P_{\frac{1}{2}}(\theta) := \frac{1}{2}(p(\theta) - p(\theta + \pi)) \qquad (\theta \in [0, 2\pi])$$

と置けば、

$$\gamma_{\frac{1}{2}}(\theta) = \left(P_{\frac{1}{2}}(\theta)\cos\theta - P_{\frac{1}{2}}{}'(\theta)\sin\theta, P_{\frac{1}{2}}(\theta)\sin\theta + P_{\frac{1}{2}}{}'(\theta)\cos\theta\right)$$

と表せる。

すなわち、$P_{\frac{1}{2}}$ が $E_{\frac{1}{2}}(C)$ の Minkowski の台関数となっている。

ここで、$\gamma_{\frac{1}{2}}(\theta+\pi)=\gamma_{\frac{1}{2}}(\theta)$ すなわち $E_{\frac{1}{2}}(C)$ が周期 $\pi$ の曲線の二重被覆になっていることに注意すると、その囲む向き付けられた面積は、(二重に測らなければ) 次で与えられる。

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_{E_{\frac{1}{2}}(C)} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_{E_{\frac{1}{2}}(C)} \gamma_{\frac{1}{2},1}d\gamma_{\frac{1}{2},2}-\gamma_{\frac{1}{2},2}d\gamma_{\frac{1}{2},1} \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left(P_{\frac{1}{2}}(\theta)^2-P_{\frac{1}{2}}{}'(\theta)^2\right)d\theta \\
&\qquad\qquad (\because\ \text{Blaschke の公式より}) \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{4}(p(\theta)-p(\theta+\pi))^2-\frac{1}{4}(p'(\theta)-p'(\theta+\pi))^2\right\}d\theta
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{16}\int_0^{2\pi}\left(p(\theta)^2 - p'(\theta)^2\right)d\theta \\
&\qquad +\frac{1}{16}\int_0^{2\pi}\left(p(\theta+\pi)^2 - p'(\theta+\pi)^2\right)d\theta \\
&\qquad -\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\left(p(\theta)p(\theta+\pi) - p'(\theta)p'(\theta+\pi)\right)d\theta \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\left(p(\theta)^2 - p'(\theta)^2\right)d\theta \\
&\qquad -\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\left(p(\theta)p(\theta+\pi) - p'(\theta)p'(\theta+\pi)\right)d\theta \\
&\qquad\qquad (\because\ p(\theta)^2,\ p'(\theta)^2\ \text{の周期性より}) \\
&= \frac{1}{4}A_C - \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\left(p(\theta)p(\theta+\pi) - p'(\theta)p'(\theta+\pi)\right)d\theta
\end{aligned}
$$

ここで

$$\phi_C := \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(p(\theta)p(\theta+\pi) - p'(\theta)p'(\theta+\pi)\right) d\theta$$

と置けば、

$$\tilde{A}_{E_{\frac{1}{2}}(C)} = \frac{1}{4}A_C - \frac{1}{4}\phi_C$$

と表せる。

今、

$$p(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

$$p'(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n(-a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta)$$

より

$$p(\theta + \pi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

$$p'(\theta + \pi) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n(-a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta)$$

であるから、Parseval の等式より次が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
\phi_C = \frac{1}{2}\Bigg[&2\pi {a_0}^2 + \pi\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n \cdot (-1)^n a_n + b_n \cdot (-1)^n b_n\} \\
&\qquad -\pi\sum_{n=1}^{\infty}\{nb_n \cdot (-1)^n nb_n + n(-a_n) \cdot (-1)^n n(-a_n)\}\Bigg] \\
= \pi {a_0}^2 - \frac{\pi}{2}&\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(n^2-1)({a_n}^2 + {b_n}^2)
\end{aligned}
$$

これから直ちに、

$$
\begin{aligned}
\phi_C &= \pi {a_0}^2 - \frac{\pi}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(n^2-1)({a_n}^2 + {b_n}^2) \\
&\geq \pi {a_0}^2 - \frac{\pi}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(n^2-1)({a_n}^2 + {b_n}^2) \\
&= A_C
\end{aligned}
$$

並びに

$$
\begin{aligned}
\phi_C &= \pi {a_0}^2 - \frac{\pi}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(n^2-1)({a_n}^2+{b_n}^2) \\
&\leq \pi {a_0}^2 + \frac{\pi}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(n^2-1)({a_n}^2+{b_n}^2) \\
&= 2\pi {a_0}^2 - \left\{\pi {a_0}^2 - \frac{\pi}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(n^2-1)({a_n}^2+{b_n}^2)\right\} \\
&= \frac{(2\pi a_0)^2}{2\pi} - A_C \ = \ \frac{{L_C}^2}{2\pi} - A_C
\end{aligned}
$$

を得る。

これらを併せて、次の不等式を得る。

$$A_C \leq \phi_C \leq \frac{{L_C}^2}{2\pi} - A_C$$

ここで、左の不等式から

$$\tilde{A}_{E_{\frac{1}{2}}(C)} = \frac{1}{4}(A_C - \phi_C) \ \leq \ 0$$

右の不等式から

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_{E_{\frac{1}{2}}(C)} &= \frac{1}{4}(A_C - \phi_C) \\
&\geq \frac{1}{4}\left\{A_C - \left(\frac{{L_C}^2}{2\pi} - A_C\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}A_C - \frac{{L_C}^2}{8\pi}
\end{aligned}$$

より

$$\frac{1}{2}A_C - \frac{{L_C}^2}{8\pi} \leq \tilde{A}_{E_{\frac{1}{2}}(C)} \leq 0$$

が成り立つ。

さらに、左の不等式から

$$ {L_C}^2 \geq 4\pi A_C - 8\pi \tilde{A}_{E_{\frac{1}{2}}(C)} $$

右の不等式から

$$ \tilde{A}_{E_{\frac{1}{2}}(C)} \leq 0 $$

より、これらを併せて

$$ {L_C}^2 \geq 4\pi A_C + 8\pi |\tilde{A}_{E_{\frac{1}{2}}(C)}| $$

を得る。

今、$C$ が定幅曲線であることは、$p(\theta)+p(\theta+\pi)$ が一定であることと同値である。一方、

$$
\begin{aligned}
p(\theta)+p(\theta+\pi) &= a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta) \\
&\qquad +a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta) \\
&= 2a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(1+(-1)^n)(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta) \\
&= 2a_0+\sum_{\substack{n=2 \\ n:\mathrm{even}}}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)
\end{aligned}
$$

より、これが定数であることは、$a_{2k}=b_{2k}=0\ (k\in\mathbf{N})$ と表せる。

一方、上の不等式において、等号が成立する、すなわち

$$
{L_C}^2 - 4\pi A_C - 8\pi|\tilde{A}_{E_{\frac{1}{2}}(C)}| = 0
$$

が成り立つことは

$$
\phi_C = \frac{{L_C}^2}{2\pi} - A_C
$$

が成り立つことと同値である。このことは

$$
\begin{aligned}
&\pi {a_0}^2 - \frac{\pi}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(n^2-1)({a_n}^2+{b_n}^2) \\
&= \pi {a_0}^2 + \frac{\pi}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(n^2-1)({a_n}^2+{b_n}^2)
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{2}{\pi}(\text{右辺} - \text{左辺}) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty}(1+(-1)^n)(n^2-1)(a_n^2+b_n^2) \\
&= \sum_{\substack{n=2 \\ n:\text{even}}}^{\infty}(n^2-1)(a_n^2+b_n^2)
\end{aligned}
$$

が成り立つことであり、やはり $a_{2k} = b_{2k} = 0$ $(k \in \mathbf{N})$ と表せる。

これは図らずも、$C$ が定幅曲線である条件に一致する。