幾何学特論A(幾何学講義II)・講義ノート

第7回

(2024年5月30日(木)配信分)

§3. 等周問題(続き)

卵形線については、逆向きの不等式も、古くから知られていた。

逆等周不等式(Hurtwiz 1902)

$\mathbf{R}^2$ 内の C^2 級卵形線 C に対し、C の縮閉線が囲む向き付けられた面積を $\tilde{A}_C$ で表すとき、次の不等式が成り立つ。

$$L_C{}^2 \leq 4\pi A_C + 4\pi|\tilde{A}_C|$$

特に、等号が成立するのは C が円周のときに限る。

その改良版が出たのは、これも比較的最近のことである。

$\boxed{\text{改良版逆等周不等式(Gao 2010)}}$

同上の C に対し、次の不等式が成り立つ。

$$L_C{}^2 \leq 4\pi A_C + \pi|\tilde{A}_C|$$

特に、等号が成立するのは C の Minkowski の台関数が

$$p(\theta) = a_0 + a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta + a_2 \cos 2\theta + b_2 \sin 2\theta$$

のときに限る。(特に $a_2 = b_2 = 0$ のとき、C は円周である。)

曲線の曲率中心の軌跡を縮閉線と呼ぶ。

卵形線 C の縮閉線の媒介変数表示は、次で与えられる。

$$\begin{aligned}
\beta(\theta) &:= \gamma(\theta) + \rho(\theta)N(\theta) \\
&= (p(\theta)\cos\theta - p'(\theta)\sin\theta, p(\theta)\sin\theta + p'(\theta)\cos\theta) \\
&\qquad\qquad + (p(\theta) + p''(\theta))(-\cos\theta, -\sin\theta) \\
&= (-p'(\theta)\sin\theta - p''(\theta)\cos\theta, p'(\theta)\cos\theta - p''(\theta)\sin\theta) \\
&= \left(-p'(\theta)\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + p''(\theta)\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right),\right. \\
&\qquad\qquad \left.-p'(\theta)\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) - p''(\theta)\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

ここで、$\tilde{\theta} := \theta - \dfrac{\pi}{2}$ と置けば

$$\beta\left(\tilde{\theta}+\frac{\pi}{2}\right) = \left(-p'\left(\tilde{\theta}+\frac{\pi}{2}\right)\cos(\tilde{\theta}) + p''\left(\tilde{\theta}+\frac{\pi}{2}\right)\sin(\tilde{\theta}),\right.$$
$$\left. -p'\left(\tilde{\theta}+\frac{\pi}{2}\right)\sin(\tilde{\theta}) - p''\left(\tilde{\theta}+\frac{\pi}{2}\right)\cos(\tilde{\theta})\right)$$

が成り立つ。

すなわち、$-p'\left(\tilde{\theta}+\dfrac{\pi}{2}\right)$ が $\beta\left(\tilde{\theta}+\dfrac{\pi}{2}\right)$ の Minkowski の台関数となっている。

よって、C の縮閉線が囲む向き付けられた面積は、次で与えられる。

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_C &= \frac{1}{2}\int_{\beta([0,2\pi])}\left(-p'\left(\tilde{\theta}+\frac{\pi}{2}\right)\right)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_{\beta([0,2\pi])}(-p'(\theta))ds \qquad (\because\ p'(\theta)\ \text{の周期性より}) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(p'(\theta)^2 - p''(\theta)^2\right)d\theta \qquad (\because\ \text{Blaschke の公式より}) \\
&= \frac{1}{2}\left[\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(nb_n)^2+(-na_n)^2\right\}-\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(-n^2a_n)^2+(-n^2b_n)^2\right\}\right] \\
&\qquad\qquad (\because\ \text{Parseval の等式より}) \\
&= -\frac{\pi}{2}\sum_{n=2}^{\infty}n^2(n^2-1)({a_n}^2+{b_n}^2)
\end{aligned}$$

特に、次が成り立つ。

$$|\tilde{A}_C| = \frac{\pi}{2}\sum_{n=2}^{\infty} n^2(n^2-1)({a_n}^2+{b_n}^2)$$

ここで、前回用意した次の Fourier 級数展開を用いた。

$$p'(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n(-a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta)$$

$$p''(\theta) = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n \cos\theta + b_n \sin n\theta)$$

よって

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi}\left({L_C}^2 - 4\pi A_C - \pi|\tilde{A}_C|\right) \\
&\qquad = \frac{{L_C}^2}{4\pi} - A_C - \frac{|\tilde{A}_C|}{4} \\
&\qquad = \pi {a_0}^2 \\
&\qquad\quad - \left\{\pi {a_0}^2 - \frac{\pi}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(n^2-1)({a_n}^2+{b_n}^2)\right\} \\
&\qquad\quad - \frac{\pi}{8}\sum_{n=2}^{\infty} n^2(n^2-1)({a_n}^2+{b_n}^2) \\
&\qquad = -\frac{\pi}{8}\sum_{n=3}^{\infty}(n^2-4)(n^2-1)({a_n}^2+{b_n}^2) \\
&\qquad \leq 0
\end{aligned}
$$

を得る。

　$n = 0, 1, 2$ について制約が無いので、等号が成立するのは、

$$p(\theta) = a_0 + a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta + a_2 \cos 2\theta + b_2 \sin 2\theta$$

のときである。

　特に $a_2 = b_2 = 0$ のとき、

$$\begin{aligned} p(\theta) &= a_0 + a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta \\ p'(\theta) &= -a_1 \sin\theta + b_1 \cos\theta \end{aligned}$$

より

$$
\begin{aligned}
\gamma(\theta) &= ((a_0 + a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta)\cos\theta \\
&\qquad\qquad -(-a_1 \sin\theta + b_1 \cos\theta)\sin\theta, \\
&\qquad (a_0 + a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta)\sin\theta \\
&\qquad\qquad +(-a_1 \sin\theta + b_1 \cos\theta)\cos\theta, \\
&= (a_0 \cos\theta + a_1, a_0 \sin\theta + b_1) \\
&= (a_1, b_1) + a_0(\cos\theta, \sin\theta)
\end{aligned}
$$

となり、C は (a_1, b_1) を中心とし、半径 a_0 の円周である。

　前回の不等式と併せてまとめると、要は、等周不等式の誤差項である

$$\frac{1}{4\pi}\left({L_C}^2 - 4\pi A_C\right) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(n^2-1)({a_n}^2+{b_n}^2)$$

をどう評価するかと言うことに尽きる。

　式としては具体的に書き下されているので、これを評価できる量を、いかに元の曲線から自然に導き出すかと言うのが、問題の本質と言えるだろう。

前回の不等式は、これを Wigner 焦線(平行対の中点の軌跡) が囲む面積の絶対値の 2 倍

$$2|\tilde{A}_{E_{\frac{1}{2}}(C)}| = \frac{\pi}{2}\sum_{\substack{n=3\\ n:\mathrm{odd}}}^{\infty}(n^2-1)({a_n}^2+{b_n}^2)$$

で下から評価したものであり、今回の逆不等式は、これを縮閉線(曲率中心の軌跡) が囲む面積の絶対値の $\dfrac{1}{4}$ 倍

$$\frac{1}{4}|\tilde{A}_C| = \frac{\pi}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{4}(n^2-1)({a_n}^2+{b_n}^2)$$

で上から評価したものである。