幾何学特論A(幾何学講義II)・講義ノート

$\boxed{\text{第８回}}$

(2024年6月6日(木)配信分)

§4. 極小曲面

$F(x,y)$ は $F(\partial D)$ を境界とする C^2 級曲面とする。

曲面 $M=F(\overline{D})$ の面積は次式で与えられる。

$$A(M) \ = \ \int_{\overline{D}} ||F_x(x,y)\times F_y(x,y)||dxdy$$

曲面 M の平均曲率は次式で与えられる。

$$H(P)=\frac{1}{2||F_x(x,y)\times F_y(x,y)||^2}$$

$$\cdot\langle G(P), ||F_y(x,y)||^2F_{xx}(x,y)+||F_x(x,y)||^2F_{yy}(x,y)$$

$$-2\langle F_x(x,y),F_y(x,y)\rangle F_{xy}(x,y)\rangle$$

$$(\forall P=F(x,y)\in M)$$

$F(x,y)$ の変分として、C^2 級写像 $F:\overline{D}\times(-\delta,\delta)\to\mathbf{R}^3$ ($\delta>0$) で、次の条件を満たすものを考える。

$$F(x,y,0)=F(x,y) \qquad (\forall(x,y)\in\overline{D}),$$

$$F(x,y,\epsilon)=F(x,y) \qquad (\forall(x,y)\in\partial D,\forall\epsilon\in(-\delta,\delta))$$

このとき、特に次が成り立つ。

$$F_\epsilon(x,y,\epsilon) \ = \ \mathbf{0} \qquad (\forall(x,y)\in\partial D,\forall\epsilon\in(-\delta,\delta))$$

ϵ を固定するとき、$M_\epsilon:=F(\overline{D}\times\{\epsilon\})$ は $M=M_0$ と境界を同じくする C^2 級曲面で、その面積は次式で与えられる。

$$A(M_\epsilon) \ = \ \int_D ||F_x(x,y,\epsilon)\times F_y(x,y,\epsilon)||dxdy$$

さて、 $M = M_0$ が面積最小のとき、$A(M_\epsilon)$ の第一変分は消える、すなわち次が成り立つはずである。

$$\left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} A(M_\epsilon) \;=\; 0$$

そこで、とりあえず左辺を計算してみると…

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} A(M_\epsilon) \\
&\quad = \frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} \int_{\overline{D}} ||F_x(x,y,\epsilon) \times F_y(x,y,\epsilon)|| dxdy \\
&\quad = \int_{\overline{D}} \frac{\partial}{\partial\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} \langle F_x(x,y,\epsilon) \times F_y(x,y,\epsilon), F_x(x,y,\epsilon) \times F_y(x,y,\epsilon)\rangle^{1/2} dxdy \\
&\quad = \int_{\overline{D}} \frac{1}{2} \langle F_x(x,y,\epsilon) \times F_y(x,y,\epsilon), F_x(x,y,\epsilon) \times F_y(x,y,\epsilon)\rangle^{-1/2} \\
&\qquad\qquad \cdot 2\langle (F_x(x,y,\epsilon) \times F_y(x,y,\epsilon))_\epsilon, F_x(x,y,\epsilon) \times F_y(x,y,\epsilon)\rangle|_{\epsilon=0} dxdy \\
&\quad = \int_{\overline{D}} ||F_x(x,y) \times F_y(x,y)||^{-1} \\
&\qquad\qquad \cdot\langle F_{x\epsilon}(x,y,0) \times F_y(x,y) + F_x(x,y) \times F_{y\epsilon}(x,y,0), \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad F_x(x,y) \times F_y(x,y)\rangle dxdy \\
&\quad = \int_{\overline{D}} \langle F_{\epsilon x}(x,y,0) \times F_y(x,y) + F_x(x,y) \times F_{\epsilon y}(x,y,0), G(F(x,y))\rangle dxdy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\langle F_{\epsilon x}(x,y,0)\times F_y(x,y), G(F(x,y))\rangle \\
&\qquad = \langle F_\epsilon(x,y,0)\times F_y(x,y), G(F(x,y))\rangle_x \\
&\qquad\qquad -\langle F_\epsilon(x,y,0)\times F_{yx}(x,y), G(F(x,y))\rangle - \langle F_\epsilon(x,y,0)\times F_y(x,y), G(F(x,y))_x\rangle \\
&\qquad = \langle F_\epsilon(x,y,0)\times F_y(x,y), G(F(x,y))\rangle_x \\
&\qquad\qquad +\langle F_{xy}(x,y)\times F_\epsilon(x,y,0), G(F(x,y))\rangle + \langle F_\epsilon(x,y,0), G(F(x,y))_x\times F_y(x,y)\rangle \\
&\langle F_x(x,y)\times F_{\epsilon y}(x,y,0), G(F(x,y))\rangle \\
&\qquad = \langle F_x(x,y)\times F_\epsilon(x,y,0), G(F(x,y))\rangle_y \\
&\qquad\qquad -\langle F_{xy}(x,y)\times F_\epsilon(x,y,0), G(F(x,y))\rangle - \langle F_x(x,y)\times F_\epsilon(x,y,0), G(F(x,y))_y\rangle \\
&\qquad = \langle F_x(x,y)\times F_\epsilon(x,y,0), G(F(x,y))\rangle_y \\
&\qquad\qquad -\langle F_{xy}(x,y)\times F_\epsilon(x,y,0), G(F(x,y))\rangle - \langle F_\epsilon(x,y,0), G(F(x,y))_y\times F_x(x,y)\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} A(M_\epsilon) \\
&\qquad = \int_{\overline{D}} \{\langle F_\epsilon(x,y,0)\times F_y(x,y), G(F(x,y))\rangle_x + \langle F_x(x,y)\times F_\epsilon(x,y,0), G(F(x,y))\rangle_y \\
&\qquad\qquad + \langle F_\epsilon(x,y,0), G(F(x,y))_x \times F_y(x,y) - G(F(x,y))_y \times F_x(x,y)\rangle\} dxdy \\
&\qquad = \int_{\partial D} -\langle F_x(x,y)\times F_\epsilon(x,y,0), G(F(x,y))\rangle dx \\
&\qquad\qquad\qquad + \langle F_\epsilon(x,y,0)\times F_y(x,y), G(F(x,y))\rangle dy \\
&\qquad\qquad + \int_{\overline{D}} \langle F_\epsilon(x,y,0), G(F(x,y))_x \times F_y(x,y) - G(F(x,y))_y \times F_x(x,y)\rangle dxdy \\
&\qquad = \int_{\overline{D}} \langle F_\epsilon(x,y,0), G(F(x,y))_x \times F_y(x,y) - G(F(x,y))_y \times F_x(x,y)\rangle dxdy
\end{aligned}
$$

ここでGreen の定理と境界条件を用いた。

今 $G(F(x,y))$ は単位ベクトル場なので、$G(F(x,y))_x$, $G(F(x,y))_y$ は共に $G(F(x,y))$ と直交するから、

$$G(F(x,y))_x, G(F(x,y))_y \in T_{F(x,y)}M$$

である。さらに

$$F_y(x,y), F_x(x,y) \in T_{F(x,y)}M$$

より、

$$G(F(x,y))_x \times F_y(x,y) - G(F(x,y))_y \times F_x(x,y)$$

は $G(F(x,y))$ と平行である。

従って、

$$
\begin{aligned}
&G(F(x,y))_x \times F_y(x,y) - G(F(x,y))_y \times F_x(x,y) \\
&\quad = \langle G(F(x,y))_x \times F_y(x,y) - G(F(x,y))_y \times F_x(x,y), \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad G(F(x,y)) \rangle G(F(x,y))
\end{aligned}
$$

と表される。

ここで

$$\langle G(F(x,y)), F_x(x,y)\rangle = \langle G(F(x,y)), F_y(x,y)\rangle = 0$$

より、次が成り立つことに注意する。

$$\langle G(F(x,y))_x, F_x(x,y)\rangle + \langle G(F(x,y)), F_{xx}(x,y)\rangle = 0$$

$$\langle G(F(x,y))_y, F_x(x,y)\rangle + \langle G(F(x,y)), F_{xy}(x,y)\rangle = 0$$

$$\langle G(F(x,y))_x, F_y(x,y)\rangle + \langle G(F(x,y)), F_{yx}(x,y)\rangle = 0$$

$$\langle G(F(x,y))_y, F_y(x,y)\rangle + \langle G(F(x,y)), F_{yy}(x,y)\rangle = 0$$

$$||F_x(x,y)\times F_y(x,y)||$$

$$\cdot\langle G(F(x,y))_x\times F_y(x,y)-G(F(x,y))_y\times F_x(x,y),G(F(x,y))\rangle$$

$$=\langle G(F(x,y))_x\times F_y(x,y)-G(F(x,y))_y\times F_x(x,y),F_x(x,y)\times F_y(x,y)\rangle$$

$$=\langle G(F(x,y))_x\times F_y(x,y),F_x(x,y)\times F_y(x,y)\rangle$$

$$-\langle G(F(x,y))_y\times F_x(x,y),F_x(x,y)\times F_y(x,y)\rangle$$

$$=\langle G(F(x,y))_x,F_y(x,y)\times(F_x(x,y)\times F_y(x,y))\rangle$$

$$-\langle G(F(x,y))_y,F_x(x,y)\times(F_x(x,y)\times F_y(x,y))\rangle$$

$$=\langle G(F(x,y))_x,||F_y(x,y)||^2F_x(x,y)-\langle F_x(x,y),F_y(x,y)\rangle F_y(x,y)\rangle$$

$$-\langle G(F(x,y))_y,-||F_x(x,y)||^2F_y(x,y)+\langle F_x(x,y),F_y(x,y)\rangle F_x(x,y)\rangle$$

ここでベクトル三重積の公式$U\times(V\times W)=\langle U,W\rangle V-\langle U,V\rangle W$ より特に
$W\times(V\times W)=||W||^2V-\langle W,V\rangle W$ 及び
$V\times(V\times W)=\langle V,W\rangle V-||V||^2W$ が成り立つことを用いた。

$$
\begin{aligned}
&= ||F_y(x,y)||^2\langle G(F(x,y))_x, F_x(x,y)\rangle \\
&\qquad -\langle F_x(x,y), F_y(x,y)\rangle\langle G(F(x,y))_x, F_y(x,y)\rangle \\
&\qquad +||F_x(x,y)||^2\langle G(F(x,y))_y, F_y(x,y)\rangle \\
&\qquad -\langle F_x(x,y), F_y(x,y)\rangle\langle G(F(x,y))_y, F_x(x,y)\rangle \\
&= -||F_y(x,y)||^2\langle G(F(x,y)), F_{xx}(x,y)\rangle \\
&\qquad +\langle F_x(x,y), F_y(x,y)\rangle\langle G(F(x,y)), F_{yx}(x,y)\rangle \\
&\qquad -||F_x(x,y)||^2\langle G(F(x,y)), F_{yy}(x,y)\rangle \\
&\qquad +\langle F_x(x,y), F_y(x,y)\rangle\langle G(F(x,y)), F_{xy}(x,y)\rangle
\end{aligned}
$$

ここで前々頁の４本の等式を用いた。

$$
\begin{aligned}
&= -\langle G(F(x,y)), ||F_y(x,y)||^2 F_{xx}(x,y) + ||F_x(x,y)||^2 F_{yy}(x,y) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -2\langle F_x(x,y), F_y(x,y)\rangle F_{xy}(x,y)\rangle \\
&= -2H(F(x,y)) \cdot ||F_x(x,y) \times F_y(x,y)||^2
\end{aligned}
$$

これを４頁前の表示に代入すれば、

$$
\begin{aligned}
&G(F(x,y))_x \times F_y(x,y) - G(F(x,y))_y \times F_x(x,y) \\
&\quad = -2H(F(x,y)) \cdot ||F_x(x,y) \times F_y(x,y)|| G(F(x,y)) \\
&\quad = -2H(F(x,y)) \cdot F_x(x,y) \times F_y(x,y)
\end{aligned}
$$

よって、次を得る。

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} A(M_\epsilon) \\
&\qquad = \int_{\overline{D}} \langle F_\epsilon(x,y,0), -2H(F(x,y)) \cdot F_x(x,y) \times F_y(x,y) \rangle dxdy \\
&\qquad = -2 \int_{\overline{D}} H(F(x,y)) \langle F_\epsilon(x,y,0), F_x(x,y) \times F_y(x,y) \rangle dxdy
\end{aligned}$$

$\psi : \overline{D} \to \mathbf{R}$ は C^0 級関数で、

$$\begin{aligned} \psi(x,y) &= 0 \qquad (\forall (x,y) \in \partial D), \\ \psi(x,y) &> 0 \qquad (\forall (x,y) \in D) \end{aligned}$$

を満たすものとする。$F(x,y,\epsilon)$ として、

$$\begin{aligned} F_\epsilon(x,y,0) = \psi(x,y) H(F(x,y)) ||F_x(x,y) \times F_y(x,y)||^{-2} \\ \cdot F_x(x,y) \times F_y(x,y) \end{aligned}$$

を満たすものをとれば、次が成り立つ。

$$\begin{aligned} &\left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} A(M_\epsilon) \\ &\quad = -2 \int_{\overline{D}} H(F(x,y)) \cdot \psi(x,y) H(F(x,y)) ||F_x(x,y) \times F_y(x,y)||^{-2} \\ &\qquad\qquad \cdot \langle F_x(x,y) \times F_y(x,y), F_x(x,y) \times F_y(x,y) \rangle dxdy \\ &\quad = -2 \int_{\overline{D}} \psi(x,y) H(F(x,y))^2 dxdy \end{aligned}$$

この積分の値は、$\psi(x,y)$ の取り方によらず、一般に 0 以下であるから、選んだ変分により、平均曲率に比例するよう法ベクトル場方向に変形すれば、曲面積が小さくなる。

$$\left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} A(M_\epsilon)=0$$

であることは、

$$\psi(x,y)H(F(x,y))^2=0 \qquad (\forall(x,y)\in\overline{D})$$

であることと同値であるから、結局

$$H(F(x,y))=0 \qquad (\forall(x,y)\in\overline{D})$$

であることと同値になる。

$F(x, y, \epsilon)$ の選び方によらず、第一変分が 0 であることは、$H(F(x, y)) = 0$ （極小曲面の方程式）を満たすことと同値で、面積最小のとき、これを満たすが、一般には最小とは限らない。

これは十分小さい範囲ならＯＫである。