幾何学特論A(幾何学講義II)・講義ノート

第９回

(2024年6月13日(木)配信分)

§4. 極小曲面(続き)

Enneper-Weierstrass の表現公式

F は $\mathbf{R}^3$ 内の曲面とする。F 上の任意の点 P に対し、P における F の法線方向が x_3-軸上方向に来るように、曲面を回転させたものは、P の近傍で関数のグラフとして表される。その関数を $x_3 = f(x_1, x_2)$ とおくとき、そのヘシアンつまり 2 階微分の行列

$$\mathrm{Hess}\ f(P) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} \end{pmatrix}$$

の二つの固有値を主曲率、トレース $/2$(=固有値の平均) $\mathrm{tr}\ \mathrm{Hess}\ f(P)/2$ を平均曲率、行列式(=固有値の積) $\det \mathrm{Hess}\ f(P)$ をGauss 曲率、と言う。主曲率、平均曲率は、法線方向すなわち向きの定め方で、符号が変わるが、Gauss 曲率は変わらない。

各点で平均曲率が 0 であるような曲面を、極小曲面と呼ぶ。極小であるか否かは、向きの定め方によらない。極小ならば Gauss 曲率は至る所非正である。

極小曲面は局所的に、次式が定める共形はめ込みの像として表される。

$$X(z) = \mathrm{Re}\int_{z_0}^{z}(1-g^2, \sqrt{-1}(1+g^2), 2g)\eta \tag{2.1}$$

ただしここで、D は $\mathbf{C}$ 内の単連結領域とし、g は D 上の有理型関数、η は D 上の正則 1 次微分形式とする。この公式を Enneper-Weierstrass の表現公式と言う。以下、記述の簡略化のため

$$\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) = (1-g^2, \sqrt{-1}(1+g^2), 2g)\eta, \qquad X(z) = \mathrm{Re}\int_{z_0}^{z}\Phi$$

と表すこともある。

g を立体射影 σ で引き戻した$G = \sigma^{-1} \circ g$ が、単位法ベクトル場を与えている。これをGauss 写像と呼ぶ。曲面の Riemann 計量は$(1+|g|^2)^2|\eta|^2$ で与えられる。

変数 z に関して、$X(z)$ の各成分は調和関数であることに注意しよう。

M を Riemann 面とする。g は M 上の有理型関数、η は M 上の正則 1 次微分形式とするとき、M 内の任意の閉曲線 C に対し、

$$\mathrm{Re}\int_C \Phi = 0$$

すなわち

$$\overline{\int_C \eta} = \int_C g^2\eta, \qquad \overline{\int_C g\eta} = -\int_C g\eta$$

が成り立つならば、(2.1) 式が M 上で定義された、極小はめ込みを与える。ここで、

$$\mathrm{Im}\int_C \Phi$$

の方は 0 である必要が無いことに注意しよう。実はこの値が後で重要になるのである。

K を Gauss 曲率とする。

$$TC(X) = \int_M |K| dv$$

を (絶対) 全曲率と呼ぶ。

全曲率有限な完備極小曲面は、compact Riemann 面 $\overline{M}$ から、有限個の点 $q_1, \ldots, q_n$ を除いたもの $M = \overline{M} \setminus \{q_1, \ldots, q_n\}$ と共形的である（等角写像で互いに写り合う）ことが知られている。このとき、g は $\overline{M}$ 上の有理型関数に、η は $\overline{M}$ 上の有理型 1 次微分形式に拡張される。

各 q_j の近傍の像を end q_j と呼び、$G(q_j) = \sigma^{-1} \circ g(q_j)$ を end q_j における limit normal と呼ぶ。

ここで、全曲率は次式で与えられる。

$$TC = \int_{\overline{M}} g^*(dv_{\mathbf{S}^2}) = 4\pi \mathrm{deg} g$$

　特に $\overline{M}$ の種数 k とすると、次のChern-Osserman の不等式が成り立つことが知られている。

$$TC \geq 4\pi(n+k-1)$$

特に等号は、各 end q_j が埋め込まれた end である（すなわち各 q_j の近傍では X が単射である）こととと必要十分である。
(Gauss-Bonnet の定理と比較してみよう。)
　今日まで（主に'80～'90 年代)、主として全曲率が小さい（具体的には 12π 以下の）極小曲面の分類、及び埋め込みとなっている極小曲面一般の存在、非存在、具体的構成等について、盛んに研究がなされて来た。ここでいくつか例を見てみよう。

例**4.1.**（catenoid ）　懸垂線 $x_1 = \cosh x_3$ の x_3 軸に関する回転面（と相似な曲面）。全曲率は

$$TC = 4\pi(2 + 0 - 1) = 4\pi$$

埋め込みにより実現される（つまり自己交差の無い）完備極小曲面で、古典的に知られていた数少ない例の一つ。また回転面で極小曲面と言えばこれしかない。なお、全曲率 4π の例は、このほかに Enneper 曲面しかないが、こちらは自己交差がある。

例**4.2.**（Jorge-Meeks 曲面）　catenoid の半分を n 個用意し、正 n 角形の各頂点方向に向けて配置し、つないだような形状の完備極小曲面。全曲率は

$$TC = 4\pi(n + 0 - 1) = 4(n-1)\pi$$

例**4.3.**（Costa 曲面）　catenoid の半分を 2 個（表裏が入れ替わるので、あくまで catenoid 1 個ではない）と平面とを平行に配置し、つないだような形状の完備極小曲面。種数 1 なので、全曲率は

$$TC = 4\pi(3+1-1) = 12\pi$$

catenoid 以来の、埋め込みにより実現される有限全曲率完備極小曲面で、その発見は曲面論を大きく発展させる契機となった。

例**4.4.**（Hoffman-Meeks 曲面）　Costa 曲面の種数を 2 以上としたもので、全曲率は

$$TC = 4\pi(3+k-1) = 4(k+2)\pi$$

$k+1$ 次巡回群（実はもう少し大きい群）の作用で不変。

具体的なデータは必要に応じて、後に与える。（ここでは画像は省略。ネット上に綺麗なグラフィックが溢れているので、曲面の名前で検索してみよう。）

上出の埋め込まれた end は、平面または catenoid のいずれかに漸近挙動を示す。いずれになるかは、g が q_j で重複点であるか否かで決まる。分岐しないときが catenoid 型である。これについては、後に改めて触れる。

参考文献

Osserman:A Survey of Minimal Surfaces, Van Nostrand Reinhold, New York, 1969.

川上・藤森：極小曲面論入門(サイエンス社)