幾何学特論A(幾何学講義II)・講義ノート

$\boxed{\text{第10回}}$

(2024年6月20日(木)配信分)

§4. 極小曲面(続き)

flux と torque の定義

$\overline{M}$ 内の任意の閉曲線 C に対し、$X(C)$ に沿う単位余法ベクトル場を n とする。

$$F(C) = \int_C n(s)ds$$

を C に関する flux vector （または force ）と言い、

$$T(C) = \int_C X(s) \times n(s)ds$$

を C に関する torque vector と言う。これは n の取り方によって符号が変わる。

$F(C)$, $T(C)$ は C の homology 類だけで決まる。実際 $\mathrm{div}\nabla X = \Delta X = 0$ で、さらに

$$\mathrm{div}(X \times \nabla X) = \mathrm{tr}\nabla(X \times \nabla X) = \mathrm{tr}(\nabla X \times \nabla X) + X \times \Delta X = 0.$$

より、発散公式により従う。

また $F(C)$ は曲面の平行移動にはよらない。$T(C)$ は $F(C)$ 方向の平行移動にはよらないことも、次式よりわかる。

$$\int_C F(C) \times n(s) ds = F(C) \times \int_C n(s) ds = F(C) \times F(C) = 0.$$

end q_j の周りを正の向きに一周する閉曲線 δ_j に対し、$X(\delta_j)$ に沿う外向き（ $\overline{M}$ 内では内向き）単位余法ベクトル場を n としたときの

$$F_j = F(\delta_j) = \int_{\delta_j} n(s)ds$$

を end q_j の flux vector （または force ）と言い、

$$T_j = T(\delta_j) = \int_{\delta_j} X(s) \times n(s)ds$$

を end q_j の torque vector と言う。特に F_j, T_j はδ_j の取り方によらない。

flux vector は実は

$$F_j = -\mathrm{Im} \int_{\delta_j} \Phi = -2\pi \mathrm{Re}\ \mathrm{Res}_{z=q_j} \Phi$$

で与えられ、従って留数計算で求められることになる。((注)最初の向きの定義により、紹介する論文とは符号が異なるので要注意。)このことから、留数定理によっても、δ_j の homology 類だけで決まることはわかる。

torque vector も

$$T_j = -\mathrm{Im} \int_{\delta_j} X \times \Phi$$

で与えられる。　さらに発散公式から、

$$\sum_{j=1}^{n} F_j = 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} T_j = 0,$$

が成り立つこともわかる。これらが最初の均衡条件である。

最も簡単な例から見てみよう。

例4.5. $g=0$, $\eta=dz$, $z_0=0$ で定義される極小曲面は

$$X(z)=(x,-y,0)$$

((計算)

$$\begin{aligned}
&\int_0^z (1-0^2, \sqrt{-1}(1+0^2), 2\cdot 0)dz \\
&\qquad = \int_0^z (1, \sqrt{-1}, 0)dz \ = \ [z, \sqrt{-1}z, 0]_0^z \\
&\qquad = (z, \sqrt{-1}z, 0) \ = \ (x+\sqrt{-1}y, -y+\sqrt{-1}x, 0)
\end{aligned}$$

)

であり、その像は x_1x_2-平面である。この場合 $\overline{M} = \hat{\mathbf{C}}$ で、$q_1 = \infty$ である。∞ の周りを正の向きに一周する閉曲線とは、複素平面 $\mathbf{C}$ 内を負の向きに一周する閉曲線であり、この場合 n は外向き単位法ベクトルである。$X(\delta_1)$ の弧長パラメーター表示を、

$$(x(s), y(s), 0) \qquad (0 \leq s \leq \ell)$$

とすれば、

$$n(s) = (-y'(s), x'(s), 0)$$

より、もう明らかであるが

$$F_1 = \int_0^\ell (-y'(s), x'(s), 0) ds = [(-y(s), x(s), C)]_0^\ell = (0, 0, 0)$$

となる。

例**4.6.** $g = z^{-1}$, $\eta = dz$, $z_0 =???$ で定義される極小曲面は

$$X(z) = (x(1+\frac{1}{r^2}), -y(1+\frac{1}{r^2}), 2\log r)$$

((計算)

$$\begin{aligned}
&\int^z (1 - z^{-2}, \sqrt{-1}(1+z^{-2}), 2z^{-1})dz \\
&\quad = (z + z^{-1}, \sqrt{-1}(z - z^{-1}), 2\log z) \\
&\quad = (x + \sqrt{-1}y + \frac{1}{r^2}(x - \sqrt{-1}y), -y + \sqrt{-1}x - \frac{1}{r^2}(y + \sqrt{-1}x), 2\log r + 2\sqrt{-1}\theta) \\
&\quad = (x\left(1+\frac{1}{r^2}\right) + \sqrt{-1}y\left(1-\frac{1}{r^2}\right), -y\left(1+\frac{1}{r^2}\right) + \sqrt{-1}x\left(1-\frac{1}{r^2}\right), 2\log r + 2\sqrt{-1}\theta)
\end{aligned}$$

)

であり、その像は catenoid

$$\frac{1}{2}\sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2}=\cosh\frac{x_3}{2}$$

である。この場合 $\overline{M}=\hat{\mathbf{C}}$ で、$q_1=\infty$, $q_2=0$ である。∞ の周りを正の向きに一周する閉曲線とは、複素平面 $\mathbf{C}$ 内の原点 0 の周りを負の向きに一周する閉曲線であり、この場合 n は外向き単位法ベクトルであるが、最も計算しやすいのは、単位円周（像では単位円周の２倍）である。

$X(\delta_1)$ の弧長パラメーター表示を、

$$(2\cos\frac{s}{2}, 2\sin\frac{s}{2}, 0) \qquad (0 \leq s \leq 4\pi)$$

とすれば、

$$n(s) = (0, 0, 1)$$

より、

$$F_1 = 4\pi(0, 0, 1)$$

となる。また、 $X(\delta_2)$ の弧長パラメーター表示を、

$$(2\cos\frac{s}{2}, -2\sin\frac{s}{2}, 0) \qquad (0 \leq s \leq 4\pi)$$

とすれば、

$$n(s) = (0, 0, -1)$$

より、

$$F_2 = 4\pi(0, 0, -1)$$

((公式の確認)

$$
\begin{aligned}
\int_{\delta_2} \Phi &= 2\pi\sqrt{-1}(0,0,2) \ = \ (0,0,4\pi\sqrt{-1}) \\
\mathrm{Im} \ \int_{\delta_2} \Phi &= (0,0,4\pi) \\
-\mathrm{Im} \ \int_{\delta_2} \Phi &= (0,0,-4\pi)
\end{aligned}
$$

)

各 end の近傍で g と η をローラン展開して計算してみれば、一般に、平面型の end の flux vector は 0 であり、また、 catenoid 型の end の flux vector は、limit normal に平行となることが確かめられる。また、大きさも漸近 catenoid のそれに一致する。埋め込まれていない end については、このようなことは一概に言えない。

極小曲面 X の end q_j が catenoid 型であるとする。$g(q_j)=0$ とするとき、$-a=\mathrm{Res}_{z=q_j}2g\eta$ とし、X の Re を取る前の q_j の近傍におけるローラン展開の定数項を (c_1,c_2,c_3) とおいて、頑張って計算すると、

$$F_j=2\pi a(0,0,-1)=2\pi aG(q_j)$$

及び

$$T_j=2\pi a(-\mathrm{Re}\,c_2,\mathrm{Re}\,c_1,0)$$

を得る。ここで、

$$E_j=(\mathrm{Re}\,c_1,\mathrm{Re}\,c_2,0)$$

とおくと、

$$E_j\times F_j=T_j$$

となる。

ここで、直線$E_j + \mathbf{R}F_j$ が end q_j の漸近 catenoid の軸となっており、この上に原点が来るように平行移動すれば、torque は 0 となる。

参考文献

Pérez:Riemannian bilinear relations on minimal surfaces, Math. Ann. 310(1998)307-332.