

幾何学特論A(幾何学講義II)・講義ノート

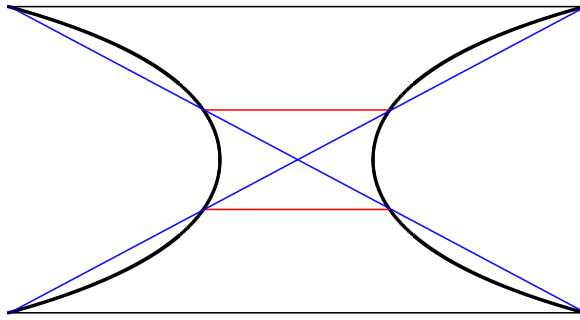
第11回

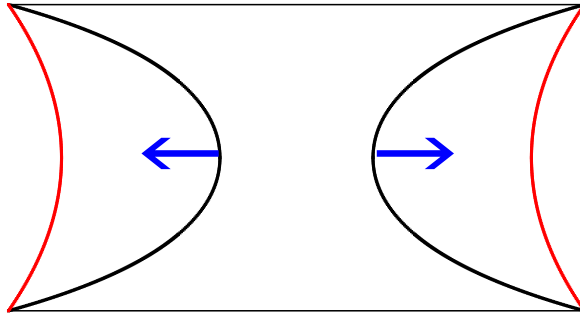
(2024年6月27日(木)配信分)

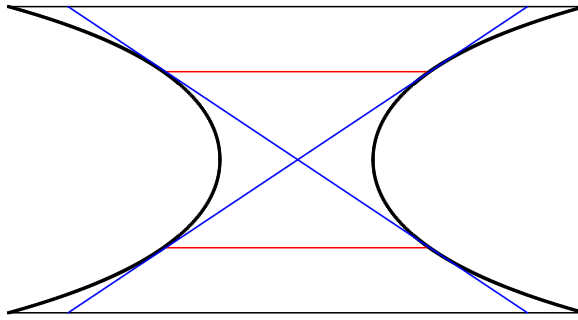
§4. 極小曲面(続き)

n -noid の index, nullity と flux

今回の内容は、立道康介氏（元大阪市立大学・現バンダイ）との共同研究に基づくものである。







極小はめ込み $X : M \rightarrow \mathbf{R}^3$ の index 及び nullity は、面積汎関数の第二変分から得られる Jacobi 作用素を用いて定義されるが、有限全曲率完備共形極小はめ込みにおいては、定義域である Riemann 面 M の compact 化 \bar{M} の上に、球面の標準計量 $ds_{\mathbf{S}^2}^2$ の Gauss 写像 $G : \bar{M} \rightarrow \mathbf{S}^2$ による引き戻しとして与えられる退化 Riemann 計量 $G^*(ds_{\mathbf{S}^2}^2)$ に関する正值 Laplacian $-\Delta^*$ の 2 未満の固有値の個数及び固有値 2 の重複度と一致することが知られている。

よって、その値は G と立体射影 $\sigma : \mathbf{S}^2 \rightarrow \hat{\mathbf{C}} := \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ の合成として得られる有理型関数 $g = \sigma \circ G$ (この関数もまた Gauss 写像と呼ばれる) のみに依存するため、 g の index 及び nullity という呼び方も併用される。この意味で、それぞれ $\text{Ind}(g)$, $\text{Nul}(g)$ と表す。

\mathbf{R}^3 の平行移動から誘導される有界な nullity 関数 (Jacobi 作用素の 0-固有関数もしくは $-\Delta^*$ の 2-固有関数) 全体の次元を考えれば、常に $\text{Nul}(g) \geq 3$ であることがわかる。いつ $\text{Nul}(g) > 3$ となるかについては、次の判定条件が知られている。

定理 4.1.(判定条件 1) (Ejiri-Kotani, Montiel-Ros) g が、分岐点を許容する flat-ended な完備極小はめ込みの Gauss 写像として実現されるとき、かつそのときに限り、 $\text{Nul}(g) > 3$ が成り立つ。

しかしながら、具体的に与えられた X もしくは g が、この判定条件を満たすか否かの判断は、一般には容易でなく、文献上で確認できる例も、そう多くはない。そこで、本研究では、埋め込まれた end のみを持つ有限全曲率完備共形極小はめ込み、所謂 n -noid に関心を絞って、判定条件 1 を、特にその flux vector を用いて記述することを試みた。

ここで言う flux vector とは、極小はめ込みの像 $X(M)$ の上の各閉曲線に対し、それに沿う unit conormal の積分として得られる vector のことである。発散公式より直ちに、flux vector は、閉曲線の連続変形で不変であることがわかる。

特に、有限全曲率完備共形極小はめ込みにおいては、その定義域として、compact Riemann 面から有限個の点を除いた領域 $M = \bar{M} \setminus \{q_1, \dots, q_n\}$ をとることができ、その際除かれた各点 q_j の近傍の像である end に対し、その周囲を一周する閉曲線に沿い、定義域では内向き、像では外向きの unit conormal を積分して得られる flux vector φ_j を、その end q_j の flux vector と呼ぶ。再び発散公式または留数定理より、全ての end q_1, \dots, q_n を亘る flux vector の総和 $\sum_{j=1}^n \varphi_j$ は常に 0 となる。この均衡条件は flux 公式と呼ばれる。

有限全曲率の場合、埋め込まれた end q_j は catenoid または平面のいずれかに漸近し、その flux vector φ_j は limit normal $G(q_j) := \lim_{z \rightarrow q_j} G(z)$ と平行となるので、その比により、漸近 catenoid と標準的 catenoid の相似比が得られる。その値 $w(q_j) := \varphi_j / 4\pi G(q_j)$ を end q_j の weight と呼ぶ。但し向きが逆のとき、weight は負となり、また、平面に漸近する場合は、weight は 0 となる。全ての end の limit normal と weight の組 $(G(q_j), w(q_j))_{j=1}^n$ を flux data と呼ぶ。

特に種数 0 の場合、二つの有理関数 g_1 と g_2 は、 \hat{C} の二つの Möbius 変換 φ と F で $g_1 \circ \varphi = F \circ g_2$ を満たすものが存在するとき、同じ index と nullity を持つことが、判定条件 1 より従う。そこで本稿では、このような g_1 と g_2 を、同値であると言うことにする。

例4.7. (Gauss 写像の例 1)(Nayatani) $N, M \in \mathbf{N}$, $N + M \geq 3$ に対し、 $g_{N\&M}(z) := z^N + z^{-M}$ とおく。

$\text{Ind}(g_{N\&M}) = 2d - 2 = 2(N + M) - 2$, $\text{Nul}(g_{N\&M}) = 5$ が成り立つ。

この $g_{N\&M}$ と同値な g を実現する n -noid として、次の例がある。

例4.8. (曲面の例 1) $N \in \mathbf{N}$, $N \geq 3$, $p, a, a' \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $p \neq \pm 1$, $a' = Na(1 - p^2)/(1 + p^2)$, に対し、Weierstrass data

$$g_{\text{pyr}}(z) = \frac{(N - 1)(p^2 - 1)z^N + p^N \{(N + 1)p^2 + (N - 1)\}}{2Np^2 z^{N-1}},$$

$$\eta_{\text{pyr}} = -\frac{a}{2(N - 1)p^2(p^2 + 1)} \left(\frac{2Np^2 z^{N-1}}{z^N - p^N} \right)^2 dz$$

は、正 N 角錐型 flux data

j	$1, \dots, N$	$N + 1$
q_j	$p\zeta_N^{j-1}$	∞
$g(q_j)$	$p\zeta_N^{j-1}$	∞
$w(q_j)$	a	a'

を満たす \mathbf{Z}_N -不変な $(N + 1)$ -noid を実現する。($\zeta_N := e^{2\pi\sqrt{-1}/N}$ とする。) この g_{pyr} は $g_{\text{N\&M}}|_{M=1} = z^{N-1} + z^{-1}$ と同値なので、
 $\text{Ind}(g_{\text{pyr}}) = 2d - 2 = 2N - 2$, $\text{Nul}(g_{\text{pyr}}) = 5$ が成り立つ。

4-noid の index と nullity

種数 0 で、 g の次数が $d := \deg g \leq 2$ の場合、 $\text{Ind}(g) = 2d - 1$, $\text{Nul}(g) = 3$ と完全に決定されているので、ここでは、まず $d = 3$ の場合、すなわち 4-noid から考えたい。この場合、flat-ended な極小はめ込みは分岐点を持ちえず、Bryant による分類の中の記述から次の事実が読み取れる。

補題 4.2. $d = 3$ の場合、 g' の零点の非調和比が ζ_6 または $\overline{\zeta_6}$ のとき、かつそのときに限り、 g は flat-ended な 4-noid の Gauss 写像として実現される。

この条件を満たすための判別式を用いて、次の判定条件を得る。

補題4.3. (判定条件 2) 3 次の有理関数

$g(z) = \sum_{j=0}^3 \alpha_j z^j / \sum_{j=0}^3 \beta_j z^j$ に対し、

$D_{\text{tet}} := 3\alpha_3\beta_0 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2 - 3\alpha_0\beta_3$ とおく。 $D_{\text{tet}} = 0$ ならば、

$\text{Ind}(g) = 2d - 2 = 4$, $\text{Nul}(g) = 5$ が、 $D_{\text{tet}} \neq 0$ ならば、

$\text{Ind}(g) = 2d - 1 = 5$, $\text{Nul}(g) = 3$ が成り立つ。

判定条件 2 の利点は、同値性を示すために、具体的に二つの Möbius 変換を見つけなくてもよいということにある。この判定条件を用いて、次の結果が得られた。

補題4.4. (判定条件3) limit normal が2次元を張る4-noidで、指定された flux を実現するような4個の end の配置が、その非調和比に関する4次方程式の4重解として与えられるとき、 $\text{Ind}(g) = 2d - 2 = 4$, $\text{Nul}(g) = 5$ が成り立つ。

実は曲面の例1もまた、その end の配置は、それらの非調和比に関する方程式の重解として与えられる。しかしながら、limit normal が2次元を張る4-noidでは、一般に end の配置は常に重解として与えられるものの、非自明な nullity を持つとは限らない。

最後に、条件 $D_{\text{tet}} = 0$ の相対 weight を用いた記述を紹介しておく。

定理 4.5. (判定条件 4) 4-noid が、 $\text{Ind}(X) = 4$, $\text{Nul}(X) = 5$ を満たすためには、その相対 weight と非調和比が次の条件を満たすことが必要十分である。

$$(w_{12} + w_{34}) + (w_{13} + w_{24})q_{1324}^2 + (w_{14} + w_{23})q_{1423}^2 = 0$$

この条件を満たすためには、相対 weight が次の条件を満たせば十分である。

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{\sigma(1)\sigma(2)}w_{\sigma(3)\sigma(4)} \neq w_{\sigma(1)\sigma(3)}w_{\sigma(2)\sigma(4)} \quad (\forall \sigma \in S_4), \\ (w_{12} + w_{34})(w_{13}w_{24} - w_{14}w_{23})^2 + (w_{13} + w_{24})(w_{14}w_{23} - w_{12}w_{34})^2 \\ \quad + (w_{14} + w_{23})(w_{12}w_{34} - w_{13}w_{24})^2 = 0 \end{array} \right.$$

\mathbf{Z}_N -不変な n -noid の index と nullity

4 次以上の有理関数について、同様の判定条件を一般に求めるのは難しい。その理由の一つは、分岐点を持つ flat-ended な極小はめ込みも考慮しなければならないことにある。ここでは、 \mathbf{Z}_N -不変な場合限定して得た結果を紹介したい。

例4.9. (Gauss 写像の例 2) $N, L \in \mathbf{N}, L \leq N - 1, s \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$
 に対し、

$$g_s(z) := \frac{sz^N + 1}{z^L(z^N - s)}$$

とおく。

$$S_{N,L}(m) := \frac{2NL}{m^2 - (N - 2)m + (N - L - 1)(L - 1)} - 1$$

とすると、次が成り立つ。

$$\text{Nul}(g_s) = \begin{cases} 5 & s^2 = S_{N,L}(N - 1) = (N + L)/(N - L) > 0 \\ 7 & s^2 \in \{S_{N,L}(m) \mid m \in \mathbf{Z}, (N - 1)/2 \leq m \leq N - 2, \\ & m \neq L - 1, N - L - 1\} \\ 5 & s^2 = S_{N,L}((N - 2)/2) = -(N + 2L)^2/(N - 2L)^2 < 0 \\ 3 & \text{上記以外でかつ} \\ & s^2 \notin \{-1, -(N + L)^2/(N - L)^2\} \text{ のとき} \end{cases}$$

例4.10. (Gauss 写像の例 2.1) $N \geq 2$ かつ

$s^2 = S_{N,L}(N-1) = (N+L)/(N-L) > 0$ のとき、

$\text{Ind}(g_s) = 2d - 2 = 2(N+L) - 2$, $\text{Nul}(g_s) = 5$ が成り立つ。

一般に、 $N, L \in \mathbf{N}$, $L \leq N - 1$, $s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{22} \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$,
 $s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21} \neq 0$ に対し、 $N + L$ 次の有理関数

$$g(z) := \frac{s_{11}z^N + s_{12}}{z^L(s_{21}z^N + s_{22})}$$

は、 $s := (-s_{11}s_{22}/s_{12}s_{21})^{1/2}$ に対し g_s と同値である。

g_s と同値な g を実現する n -noid として、次の例がある。

例4.11. (曲面の例 2) $N \in \mathbf{N}, N \geq 2, a, t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, に対し、Weierstrass data

$$g(z) = -\frac{1}{tf(z)}, \quad \eta = -taf(z)^2 dz,$$

$$\text{但し } f(z) = \frac{(N+1)z^N + (N-1)}{z(z^N - 1)}$$

は、平行な flux data

j	$1, \dots, N$	$N+1$	$N+2$
q_j	ζ_N^{j-1}	0	∞
$g(q_j)$	0	0	∞
$w(q_j)$	a	$-a(N-1)/2$	$a(N+1)/2$

を満たす \mathbf{Z}_N -不変な $(N + 2)$ -noid を実現する。この g は、
 $s = \sqrt{(N + L)/(N - L)}$, $(N, L) = (N, 1)$ に対応する g_s と同値で
あるので、 $\text{Ind}(g) = 2d - 2 = 2(N + 1) - 2 = 2(N + 2) - 4$,
 $\text{Nul}(g) = 5$ が成り立つ。

例4.12. (曲面の例3) $N, M \in \mathbf{N}$, $N \geq 2$, $1 \leq M \leq N - 1$,
 $(N, M) = 1$, $q, p, a, s, t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, 但し

$$p = \rho(q) + \sqrt{\rho(q)^2 + 1} > 0, \quad \text{但し} \quad \rho(q) = \frac{N}{N - M} \cdot \frac{q^{2N-M} - q^M}{q^{2N} + 1},$$

$$s = \frac{pq^{2N-M} - 1}{q^{N-M}(p + q^M)},$$

$$t = \frac{aN(p^2 - 1)(q^{2N} + 1)(p + q^M)^2}{(p^2 + 1)q^{2M}(p^2q^{2N-2M} - 1)} \quad (p^2q^{2N-2M} - 1 \neq 0 \text{ のとき})$$

$$a = 0 \quad (p^2q^{2N-2M} - 1 = 0, q \neq \pm 1 \text{ のとき})$$

に対し、Weierstrass data

$$g(z) = \frac{sz^N + 1}{z^{N-M}(z^N - s)}, \quad \eta = -t \frac{z^{2N-M-1}(z^N - s)^2}{(z^N - q^N)^2(z^N + q^{-N})^2} dz$$

は、正 N 角反柱型 flux data

j	$1, \dots, N$	$N + 1, \dots, 2N$
q_j	$q\zeta_N^{M(j-1)}$	$q^{-1}\zeta_{2N}^{M(2j-1)}$
$g(q_j)$	$p\zeta_N^{M(j-1)}$	$p^{-1}\zeta_{2N}^{M(2j-1)}$
$w(q_j)$	a	a

を満たす \mathbf{Z}_N -不変な $2N$ -noid を実現する。この $2N$ -noid は、
 $M = 1$ かつ $q \neq -1$ のとき分岐点を持たず、そして、 q が方程式
 $\rho(q) = (p^2 - 1)/(2p)$ の重解、すなわち flux vector の動きが一瞬止
まる ($\partial p/\partial q = 0$) とき、 $s^2 = S_{N, N-M} = (2N - M)/M$ となり、
 $\text{Ind}(g) = 2d - 2 = 2(2N - M) - 2$, $\text{Nul}(g) = 5$ が成り立つ。

例4.13. (曲面の例 3.1) $N = 2, M = 1, q = p = (\sqrt{6} + \sqrt{2})/2$ のとき、四面体群不変な 4-noid で、 $s^2 = 3 = S_{2,1}$ より、 $\text{Ind}(g) = 2 \cdot 3 - 2 = 4, \text{Nul}(g) = 5$ が成り立つ。

例4.14. (曲面の例 3.2) $N = 3, M = 1, q = p = (\sqrt{6} + \sqrt{2})/2$ のとき、八面体群不変な 6-noid で、 $s^2 = 25/2 \neq 5 = S_{3,2}$ より、 $\text{Ind}(g) = 2 \cdot 6 - 3 = 9, \text{Nul}(g) = 3$ が成り立つ。

すなわち、正多面体の対称性は、非自明な nullity とは必ずしも結びつかない。

nullity と flux 写像

ここまでで見て来た重解であることの意味は、実は n -noid の空間を flux により parametrize したときの、分岐点であることに対応するように思われる。そこで最後に、nullity と flux 写像の関係について見ておきたい。

\mathcal{M} を任意種数の n -noid の空間とし、flux 写像

$$\mathcal{F} : \mathcal{M} \rightarrow (\mathbf{S}^2)^n \times \mathbf{R}^n \text{ を}$$

$$\mathcal{F}(X) := (G(q_1), \dots, G(q_n), w(q_1), \dots, w(q_n)) \text{ により定義する。}$$

$\mathbf{C} \supset U$ は開集合、 $\mathbf{R} \supset I$ は開区間、 $q(t)$ ($t \in I$) は U 内の滑らかな曲線とし、共形極小はめ込みの 1-parameter 族 $X : (U \times I) \setminus \{(q(t), t) \mid t \in I\} \rightarrow \mathbf{R}^3$ に対し、 $X(\cdot, t)$ の Weierstrass data を (g, η) で表す。 $X(\cdot, t)$ が $q(t)$ で catenoid 型または平面型の end を持つとすると、その Taylor または Laurent 級数展開は次の形で与えられる。

$$\begin{aligned}
 g &= p + \gamma(z - q) + (z - q)^2 g_2(z), \\
 \eta &= \left\{ \frac{B}{(z - q)^2} + \frac{b}{z - q} + f_0(z) \right\} dz
 \end{aligned}$$

ここで、 p, γ, B 及び b は、いずれも $t \in I$ のみによる滑らかな関数である。

$(G(q), w(q)) = (v, a)$ を $X(\cdot, t)$ の flux data とするとき、次が成り立つ。

$$\langle \Phi_t, G \rangle = \frac{|p|^2 + 1}{|g|^2 + 1} \left\{ \frac{2p_t B}{z - q} - 2a_t \log(z - q) \right\} + O(1)$$

これから、 $p_t = 0$ かつ $a_t = 0$ ならば、Jacobi 関数 $\langle X_t, G \rangle = \operatorname{Re} \langle \Phi_t, G \rangle$ は q の近くで有界であるとわかる。よって、次を得る。

定理 4.6. (判定条件 5) flux 写像の臨界点の nullity は 3 より大きい。

参考文献

Ejiri-Kotani: Index and flat ends of minimal surfaces, Tokyo J. Math. 16(1993), 37-48.

Montiel-Ros: Schrödinger operators associated to a holomorphic map; in Global Differential Geometry and Global Analysis (Berlin, 1990), Lecture Notes in Math. 1481, Springer, Berlin, 1991, 147-174.

Nayatani: Morse index of complete minimal surfaces; in The Problem of Plateau, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1992, 181-189.

Nayatani: Morse index and Gauss maps of complete minimal surfaces in Euclidean 3-space, Comment. Math. Helv. 68(1993), 511-537.