幾何学特論A(幾何学講義II)・講義ノート

$\boxed{\text{第12回}}$

(2024年7月4日(木)配信分)

§5. 等周問題(再)

$F:\overline{D}\to\mathbf{R}^3$ は§4 の C^2 級写像とし、特に曲面 $M=F(\overline{D})$ は自己交差を持たず、さらに、比較的説明が容易な場合として、その境界 $F(\partial D)$ は x_1x_2 平面上に、また内部 $F(D)$ は上半空間 $x_3>0$ 内にあるものを考える。

M が x_1x_2 平面と囲む立体の体積は、次式により与えられる。

$$
\begin{aligned}
V(M) &= \frac{1}{3}\int_{\overline{D}}\langle G(F(x,y)),F(x,y)\rangle||F_x(x,y)\times F_y(x,y)||dxdy\\
&= \frac{1}{3}\int_{\overline{D}}\langle F(x,y),F_x(x,y)\times F_y(x,y)\rangle dxdy\\
&= \frac{1}{3}\int_{\overline{D}}\left|F(x,y),F_x(x,y),F_y(x,y)\right|dxdy
\end{aligned}
$$

$F(x,y)$ の変分として、§4 の C^2 級写像 $F:\overline{D}\times(-\delta,\delta)\to\mathbf{R}^3$ ($\delta>0$) を考える。ϵ を固定するとき、曲面 $M_\epsilon=F(\overline{D}\times\{\epsilon\})$ もまた自己交差を持たず、その境界 $F(\partial D\times\{\epsilon\})(=F(\partial D))$ は x_1x_2 平面上に、また内部 $F(D\times\{\epsilon\})$ は上半空間 $x_3>0$ 内にあるものとする。

M_ϵ が x_1x_2 平面と囲む立体の体積は、次式により与えられる。

$$
\begin{aligned}
V(M_\epsilon) &= \frac{1}{3}\int_{\overline{D}}\langle G(F(x,y,\epsilon)),F(x,y,\epsilon)\rangle ||F_x(x,y,\epsilon)\times F_y(x,y,\epsilon)||dxdy\\
&= \frac{1}{3}\int_{\overline{D}}\langle F(x,y,\epsilon),F_x(x,y,\epsilon)\times F_y(x,y,\epsilon)\rangle dxdy\\
&= \frac{1}{3}\int_{\overline{D}}|F(x,y,\epsilon),F_x(x,y,\epsilon),F_y(x,y,\epsilon)|\,dxdy
\end{aligned}
$$

さて、 $M = M_0$ が、その囲む体積一定と言う条件下で面積最小のとき、$A(M_\epsilon)$ の条件付第一変分は消える、すなわち次が成り立つはずである。

$$\left.\frac{\partial}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\{A(M_\epsilon) - \lambda(V(M_\epsilon) - V_0)\} \;=\; 0$$

ここで λ は変分に依らない(未定)定数、$V_0 = V(M_0)$ である。

§4 同様に、次が成り立つ。

$$\left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} A(M_\epsilon) = -2\int_{\overline{D}} H(F(x,y))\langle F_\epsilon(x,y,0), F_x(x,y)\times F_y(x,y)\rangle dxdy$$

一方、

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} V(M_\epsilon) &= \frac{1}{3}\left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \int_{\overline{D}} |F(x,y,\epsilon), F_x(x,y,\epsilon), F_y(x,y,\epsilon)|\, dxdy \\
&= \frac{1}{3}\int_{\overline{D}} \{|F_\epsilon, F_x, F_y| + |F, F_{x\epsilon}, F_y| + |F, F_x, F_{y\epsilon}|\}\, dxdy \\
&= \frac{1}{3}\int_{\overline{D}} \{|F_\epsilon, F_x, F_y| + |F, F_{\epsilon x}, F_y| + |F, F_x, F_{\epsilon y}|\}\, dxdy \\
&= \frac{1}{3}\int_{\overline{D}} \{|F_\epsilon, F_x, F_y| \\
&\qquad + \left.|F, F_\epsilon, F_y|\right|_x - |F_x, F_\epsilon, F_y| - |F, F_\epsilon, F_{yx}| \\
&\qquad + \left.|F, F_x, F_\epsilon|\right|_y - |F_y, F_x, F_\epsilon| - |F, F_{xy}, F_\epsilon|\Big\}\, dxdy \\
&= \frac{1}{3}\int_{\overline{D}} \Big\{3\,|F_\epsilon, F_x, F_y| + \left.|F, F_\epsilon, F_y|\right|_x + \left.|F, F_x, F_\epsilon|\right|_y\Big\}\, dxdy \\
&= \int_{\overline{D}} |F_\epsilon, F_x, F_y|\, dxdy + \frac{1}{3}\int_{\partial D} |F, F_\epsilon, F_y|\, dy - |F, F_x, F_\epsilon|\, dx \\
&= \int_{\overline{D}} |F_\epsilon(x,y,0), F_x(x,y), F_y(x,y)|\, dxdy \\
&= \int_{\overline{D}} \langle F_\epsilon(x,y,0), F_x(x,y) \times F_y(x,y)\rangle dxdy
\end{aligned}
$$

よって、次を得る。

$$\frac{\partial}{\partial\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0}\{A(M_\epsilon)-\lambda(V(M_\epsilon)-V_0)\}$$
$$= -\int_D (2H(F(x,y))+\lambda)\langle F_\epsilon(x,y,0), F_x(x,y)\times F_y(x,y)\rangle dxdy$$

そこで $F(x,y,\epsilon)$ として、

$$F_\epsilon(x,y,0)=\varphi(x,y)(2H(F(x,y))+\lambda)F_x(x,y)\times F_y(x,y)$$

を満たすものをとれば、次が成り立つ。

$$\frac{\partial}{\partial\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0}\{A(M_\epsilon)-\lambda(V(M_\epsilon)-V_0)\}$$
$$= -\int_D \varphi(x,y)(2H(F(x,y))+\lambda)^2||F_x(x,y)\times F_y(x,y)||^2 dxdy$$

この積分の値は、一般に 0 以下であるから、ちょうど 0 でない限り、選んだ変分により変形すれば、曲面の面積が小さくなる。

$$\left.\frac{\partial}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} \{A(M_\epsilon) - \lambda(V(M_\epsilon) - V_0)\} = 0$$

であることは、

$$(2H(F(x,y)) + \lambda)^2 = 0 \qquad (\forall (x,y) \in \overline{D})$$

であることと同値であるから、結局、面積最小である曲面においては

$$H(F(x,y)) = -\frac{\lambda}{2} \qquad (\forall (x,y) \in \overline{D})$$

が成り立つ。