幾何学特論A(幾何学講義II)・講義ノート

$\boxed{\text{第13回}}$

(2024年7月11日(木)配信分)

§6. 調和写像

今回と次回の２回にわたり、代表的な変分問題の対象であるRiemann 多様体間の調和写像に関する古典とも言うべき

Eells-Sampson: Harmonic Mappings of Riemannian Manifolds.

American Journal of Mathematics, 86 (1964), 109-160.

の概要を紹介する。最小限必要なRiemann 幾何の用語については、必要に応じてその都度説明する。

(M,g), (M',g') は、それぞれ n, m 次元のC^∞ 級 compact Riemann 多様体で、特に M は compact とする。$(x^1,\dots,x^n)$ は M の局所座標系、$(y^1,\dots,y^m)$ は M' の局所座標系とする。

Riemann 計量とは、多様体の各点において、その接空間に内積を定めるものである。

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \qquad (i,j=1,\dots,n),$$
$$g'_{\alpha\beta} = g'\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial}{\partial y^\beta}\right) \qquad (\alpha,\beta=1,\dots,m)$$

とおけば、g, g' の局所座標表示はそれぞれ

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx^i dx^j,$$
$$ds'^2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} g'_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta$$

で与えられる。

　また$(g_{ij})_{i,j=1}^n$ の逆行列を$(g^{ij})_{i,j=1}^n$ で表す。これは(接空間ではなく) 余接空間の内積を定めるものである。

写像 $f : M \to M'$ に対し、その局所座標表示を $(f^1, \dots, f^m)$ とし、その各成分 f^α $(\alpha = 1, \dots, m)$ の１階２階の共変微分をそれぞれ

$$
\begin{aligned}
f_i{}^\alpha &= \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \qquad (i = 1, \dots, n), \\
f_{ij}{}^\alpha &= \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}{}^k \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^k} \qquad (i, j = 1, \dots, n)
\end{aligned}
$$

と略記する。

ここで、$\Gamma_{ij}{}^k$ は (M, g) の Christoffel 記号で、具体的には次式で与えられる。

$$
\Gamma_{ij}{}^k = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{n} g^{k\ell} \left(\frac{\partial g_{\ell j}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell} \right)
$$
$$
(i, j, k = 1, \dots, n)
$$

M 上の各点における写像 f の energy 密度は次で与えられる。

$$e(f) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} f_i^{\ \alpha} f_j^{\ \beta} g'_{\alpha\beta}$$

今、各点 $P \in M$ の近傍において、少なくともその点 P においては局所座標表示がEuclid 計量と一致するような局所座標系(normal coordinate systems) をとることができる。この局所座標系を用いると、点 P での $e(f)$ の表示は

$$e(f)(P) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{m}(f_i^{\ \alpha})^2$$

となるため、$e(f)(P) \geq 0$ が成立し、等号成立は、点 P において

$$f_i^{\ \alpha} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n; \alpha = 1, \ldots, m)$$

が成り立つ時に限ることがわかる。

dv_g を (M,g) の体積要素とする。局所座標表示すれば

$$dv_g = \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

である。f の energy を

$$E(f) = \int_M e(f) dv_g$$

で定義する。

前頁の考察より、各点で $e(f) \geq 0$ が成り立つので、

$$E(f) \geq 0$$

であり、等号成立は M 上の全ての点において $e(f) = 0$ が成り立つ、すなわち f が定値写像である場合に限ることが、直ちにわかる。

E の Euler-Lagrange 方程式は、次の楕円型偏微分方程式系として記述される。

$$\Delta f^\alpha + \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \sum_{\beta,\gamma=1}^{m} {\Gamma'}_{\beta\gamma}{}^{\alpha} f_i{}^\beta f_j{}^\gamma = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

ここで、Δ は M の Laplace-Beltrami 作用素(所謂 Laplacian)で、局所座標表示すれば、

$$\Delta f^\alpha = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \left(f_{ij}{}^\alpha - \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}{}^k f_k{}^\alpha \right)$$

となる。

また${\Gamma'}_{\beta\gamma}{}^{\alpha}$ は (M', g') の Christoffel 記号である。

以下、$E(f)$ の第一変分から、上記の偏微分方程式系を導く手順を、簡単に述べておく。

$f_t : M \to M'$ $(t_0 < t < t_1)$ を写像の滑らかな変形族とする。

$$
\begin{aligned}
E(f_t) &= \int_M e(f_t) dv_g \\
&= \frac{1}{2} \int_M \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} {f_{t,i}}^{\alpha} {f_{t,j}}^{\beta} g'_{\alpha\beta} dv_g
\end{aligned}
$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} E(f_t) = \frac{1}{2} \int_M \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \Bigg(& 2{f_{t,i}}^{\alpha} \frac{\partial {f_{t,j}}^{\beta}}{\partial t} g'_{\alpha\beta} \\
& + {f_{t,i}}^{\alpha} {f_{t,j}}^{\beta} \sum_{\nu=1}^{m} g'_{\alpha\beta,\nu} \frac{\partial {f_t}^{\nu}}{\partial t} \Bigg) dv_g
\end{aligned}
$$

である。

一方、発散公式より

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_M \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} g^{ij} \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} {f_{t,i}}^{\alpha} \frac{\partial {f_t}^{\beta}}{\partial t} g'_{\alpha\beta} \right)_j dv_g \\
&= \int_M \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \left({f_{t,ij}}^{\alpha} \frac{\partial {f_t}^{\beta}}{\partial t} g'_{\alpha\beta} + {f_{t,i}}^{\alpha} \frac{\partial {f_{t,j}}^{\beta}}{\partial t} g'_{\alpha\beta} \right. \\
&\qquad \left. + {f_{t,i}}^{\alpha} \frac{\partial {f_t}^{\beta}}{\partial t} \sum_{\nu=1}^{m} g'_{\alpha\beta,\nu} {f_{t,j}}^{\nu} \right) dv_g
\end{aligned}
$$

が成り立つので、

$$
\begin{aligned}
&\int_M \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} {f_{t,i}}^{\alpha} \frac{\partial {f_{t,j}}^{\beta}}{\partial t} g'_{\alpha\beta} dv_g \\
&\qquad = -\int_M \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \left({f_{t,ij}}^{\alpha} \frac{\partial {f_t}^{\beta}}{\partial t} g'_{\alpha\beta} \right. \\
&\qquad\qquad\qquad \left. + {f_{t,i}}^{\alpha} \frac{\partial {f_t}^{\beta}}{\partial t} \sum_{\nu=1}^{m} g'_{\alpha\beta,\nu} {f_{t,j}}^{\nu} \right) dv_g
\end{aligned}
$$

を、前々頁の $\dfrac{d}{dt}E(f_t)$ の右辺第１項に代入して整理すれば、

$$\frac{d}{dt}E(f_t) = -\int_M \sum_{\gamma,\nu=1}^{m} \tau(f_t)^\gamma g'_{\gamma\nu} \frac{\partial {f_t}^\nu}{\partial t} dv_g$$

を得る。

　但し

$$\tau(f)^\gamma = \Delta f^\gamma + \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} {\Gamma'_{\alpha\beta}}^\gamma {f_i}^\alpha {f_j}^\beta \qquad (\gamma = 1, \ldots, m)$$

である。$\tau(f)$ は f の tension 場と呼ばれる。これが正しく $E(f)$ の第一変分に他ならず、$\tau(f) = \mathbf{0}$ を満たす f を調和写像と呼ぶ。

各点 $P \in M$ に対して、先に述べたような都合の良い局所座標(normal coordinate systems)を、$P \in M$, $f(P) \in M'$ それぞれでとれば、少なくともそれらの点においては、${\Gamma_{ij}}^k(P)$, ${\Gamma'_{\alpha\beta}}^\gamma(f(P))$ 達がいずれも 0 となるような局所座標表示が得られるので、その一点のみにおいては

$$\tau(f)^\gamma(P) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f^\gamma}{\partial {x^i}^2} \qquad (\gamma = 1, \dots, m)$$

すなわち Euclid 計量に関するLaplacian と同じ形となる。

特に (M', g') が Euclid 空間 $\mathbf{R}^m$ またはその離散群による商多様体である場合には、標準座標系における ${\Gamma'}_{\alpha\beta}^{\gamma}$ の表示は恒等的に 0 となるため、

$$\tau(f)^{\gamma} = \Delta f^{\gamma} \qquad (\gamma = 1, \ldots, m)$$

となり、写像 f が調和写像であることは、その各成分 f^{α} $(\alpha = 1, \ldots, m)$ が全て(M 上の)調和関数であることと同値である。

特に $\mathbf{R}^m$ の場合には、M が compact であると言う仮定の下では、最大値の原理により、各 f^{α} は定数関数でなければならず、従って f は定値写像となる。

(M', g') が $\mathbf{R}^m$ でない場合には、調和写像は定値写像とは限らない。例えば、M は円周 S^1 と同相であり、(M, g) が (M', g') の部分多様体の場合、包含写像 $i : M \to M'$ が調和写像であることは、実は M が M' の閉測地線であることと同値である。特に M' が compact の時、任意に与えられた閉曲線と同じ homotopy 類に属する閉測地線の存在が知られている。

今回紹介している論文の後半において、M' が compact で、さらにその断面曲率が非正である場合に、放物型偏微分方程式の解として得られる flow の極限として、任意に与えられた写像と同じ homotopy 類に属する調和写像の存在が示される。