幾何学特論A(幾何学講義II)・講義ノート

$\boxed{\text{第14回}}$

(2024年7月18日(木)配信分)

§6. 調和写像(続き)

τ は前回の通りとし、写像の変形族 $f_t : M \to M'$ $(t_0 < t < t_1)$ は、放物型偏微分方程式

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = \tau(f_t) \qquad (t_0 < t < t_1)$$

の解とする。

一般に、写像 $(t_0, t_1) \times M \to M'$ $(t, P) \mapsto f(t, P)$ が、$(t_0, t_1) \times M$ 上 C^1 級、かつ各 $t \in (t_0, t_1)$ に対し $f_t(\cdot) : M \to M'$ が C^2 級ならば、その写像は実は C^∞ 級であることが示される。

E も前回の通りとする。既に見たように、$E(f_t)$ の第一変分は

$$\frac{d}{dt}E(f_t) = -\int_M \sum_{\gamma,\nu=1}^{m} \tau(f_t)^\gamma g'_{\gamma\nu} \frac{\partial f_t{}^\nu}{\partial t} dv_g$$

と表される。

従って、　上記の方程式の解 f_t に対しては、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(f_t) &= -\int_M \sum_{\gamma,\nu=1}^{m} \frac{\partial f_t{}^\gamma}{\partial t} g'_{\gamma\nu} \frac{\partial f_t{}^\nu}{\partial t} dv_g \\ &= -\int_M \left| \frac{\partial f_t}{\partial t} \right|^2 dv_g \ \leq \ 0\end{aligned}$$

が成り立つので、$\tau(f_t) = \mathbf{0}$ である t を除いて $E(f_t)$ は狭義単調減少となる。

さらに $E(f_t)$ の第二変分が、次のように表される。

$$\frac{d^2}{dt^2}E(f_t) = -2\int_M \sum_{\gamma,\nu=1}^{m} \tau(f_t)^\gamma g'_{\gamma\nu}\frac{D}{dt}\left(\frac{\partial f_t}{\partial t}\right)^\nu dv_g$$

ここで、共変微分 $\frac{D}{dt}\left(\frac{\partial f_t}{\partial t}\right)$ は、各点 $P \in M$ に対し、軌道 $f_t(P) \in M'$ $(t_0 < t < t_1)$ の曲率ベクトルを与えている。

一方、任意の変形族 f_t に対し、$E(f_t)$ の第二変分は一般に

$$\frac{d^2}{dt^2}E(f_t) = \int_M \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \frac{D}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f_t}{\partial t}\right)^\alpha \frac{D}{\partial x^j}\left(\frac{\partial f_t}{\partial t}\right)^\beta {g'}_{\alpha\beta} dv_g$$

$$- \int_M \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \sum_{\alpha,\beta,\mu,\nu=1}^{m} {R'}^{m}_{\alpha,\beta,\mu,\nu} {f_{t,i}}^{\alpha} {f_{t,j}}^{\beta} \frac{\partial {f_t}^{\mu}}{\partial t} \frac{\partial {f_t}^{\nu}}{\partial t} {g'}_{\alpha\beta} {g'}_{\mu\nu} dv_g$$

$$- \int_M \sum_{\gamma,\nu=1}^{m} \tau(f_t)^\gamma g'_{\gamma\nu} \frac{D}{dt}\left(\frac{\partial f_t}{\partial t}\right)^\nu dv_g$$

と計算される。但し、R' は (M', g') の曲率テンソルである。

因みに $\dfrac{\partial f_t}{\partial t}$ の共変微分は、次で与えられるものである。

$$\frac{D}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f_t}{\partial t}\right)^\alpha = \frac{\partial^2 {f_t}^{\alpha}}{\partial x^i \partial t} + \sum_{\mu,\nu=1}^{m} {\Gamma'_{\mu\nu}}^{\alpha} \frac{\partial {f_t}^{\mu}}{\partial x^i} \frac{\partial {f_t}^{\nu}}{\partial t} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

上記の方程式の解 f_t については、これら２本の等式から、
$\tau(f_t)$ を含む積分を消去して、次を得る。

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}E(f_t) = \int_M \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \frac{D}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f_t}{\partial t}\right)^{\alpha} \frac{D}{\partial x^j}\left(\frac{\partial f_t}{\partial t}\right)^{\beta} {g'}_{\alpha\beta} dv_g$$

$$- \int_M \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \sum_{\alpha,\beta,\mu,\nu=1}^{m} {R'}^{m}_{\alpha,\beta,\mu,\nu} {f_{t,i}}^{\alpha} {f_{t,j}}^{\beta} \frac{\partial {f_t}^{\mu}}{\partial t} \frac{\partial {f_t}^{\nu}}{\partial t} {g'}_{\alpha\beta} {g'}_{\mu\nu} dv_g$$

右辺第一項は常に非負である。ここでさらに (M', g') の曲率が非正ならば、右辺第二項も非負となるので、

$$\frac{d^2}{dt^2}E(f_t) \geq 0 \qquad (t_0 < t < t_1)$$

が成立する。(特に、等号が成立するような t に対しては、

$$\frac{D}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f_t(P)}{\partial t}\right) = \mathbf{0} \qquad (P \in M; i = 1, \ldots, n)$$

が成り立つ。)

以上の評価から、f_t が大域解のとき(つまり $t_1 = \infty$ ととれるとき)、

$$\frac{d}{dt}E(f_t) \to 0 \qquad (t \to \infty)$$

を得る。

準備はここまでで、以下、次のような一般的な手順により、放物型方程式の解の、楕円型方程式の解への収束が示される。

r 次以下の全ての微分が2 乗可積分であるようなM から M' への写像全体の空間を$\mathcal{H}^r(M, M')$ で表す。

$2r > n = \dim M$ のとき、Sobolev の不等式より、$\mathcal{H}^r(M, M')$ の元は全て連続写像であり、そこには一様位相以上の位相が入る。

$\mathcal{H}^r(M, M')$ には可分な Hilbert 空間を model とする無限次元可微分多様体の構造が入り、$E : \mathcal{H}^r(M, M') \to \mathbf{R}$ は微分可能な関数となる。

τ^r を$\mathcal{H}^r(M, M')$ におけるE の勾配ベクトル場、すなわち

$$\nabla_v E(f) = -\langle \tau^r(f), v \rangle \qquad (v \in T_f \mathcal{H}^r(M, M'))$$

を満たすものとするとき、常微分方程式

$$\frac{df_t}{dt} = \tau^r(f_t)$$

は、与えられた初期条件に対して一意な局所解(短時解)を持ち、かつ$E(f_t)$ は減少関数となる。(減少関数となることは示した。)

さらに、適当な曲率の条件の下では、大域解(長時解)を持つ。

ここで f_t が相対 compact ならば、$t \to \infty$ のとき f_t は収束して、($\dfrac{df_t}{dt}$ が $\mathbf{0}$ に収束するので、) その極限は調和写像となる。

以上のことを示すためには、方程式の解についての、多くのアプリオリ評価が必要であり、解析的にはある意味ここからが本番であるが、この講義では省略する。