幾何学特論A(幾何学講義II)・講義ノート

$\boxed{\text{第15回}}$

(2024年7月25日(木)配信分)

§7. Willmore 曲面

本講義の最後に、Willmore 曲面について、簡単に紹介しておきたい。

有名な Willmore 予想が Marques-Neves によって解決されたのは 2012 年のことで、長い数学史の中では比較的記憶に新しい。

なお、今回の講義ノート作成にあたっては、山口大学数理科学レクチャーノートシリーズの安藤直也氏、川上裕氏による解説を参考にした。

M は $\mathbf{R}^3$ 内にはめ込まれた(つまり自己交差は許容する)閉曲面とする。H を M の平均曲率、dS を($\mathbf{R}^3$ から誘導される) M の面積要素とする。このとき、M の Willmore 汎関数(Willmore エネルギー) を

$$\mathcal{W}(M) := \int_M H^2 dS$$

で定義する。$\mathcal{W}(M)$ は $\mathbf{R}^3$ の共形変換で不変である。

$\mathcal{W}$ の停留曲面を$\mathbf{R}^3$ 内の Willmore 曲面と呼ぶ。

$\mathcal{W}$ の第一変分を具体的に計算することにより、Willmore 曲面は次の偏微分方程式の解として特徴付けられる。

$$\Delta H + 2(H^2 - K)H = 0$$

ここで、Δ, K はそれぞれ、M の Laplacian, Gauss 曲率である。

Willmore は、$\mathbf{R}^3$ 内の任意の閉曲面 M に対して、

$$\mathcal{W}(M) \geq 4\pi$$

が成り立つこと、さらに特に等号成立は、標準的球面 $\mathbf{S}^2$ の場合に限ることを証明した。

ここで最小値を実現する $\mathbf{S}^2$ が種数 0 であることから、種数 1 以上の場合に限定すれば、$\mathcal{W}(M)$ の下からの評価は改善の余地があることになる。この問題について Willmore は、

$$\mathcal{W}(M) \geq 2\pi^2$$

と予想した。これが所謂 Willmore 予想と呼ばれるものである。

ここで最小値候補の $2\pi^2$ には根拠があり、特に種数 1 (すなわちトーラスと同相な曲面) の場合に、等号が成立する例が、具体的に構成できる。

まず、$\mathbf{R}^3$ 内の回転トーラス

$$T_{a,b} := \left\{ \begin{pmatrix} (a+b\cos u)\cos v \\ (a+b\cos u)\sin v \\ b\sin u \end{pmatrix} \middle| \ u, v \in [0, 2\pi) \right\}$$

を考える。そこでの $\mathcal{W}$ の値は、

$$\mathcal{W}(T_{a,b}) = \frac{\pi^2}{\dfrac{b}{a}\sqrt{1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}}$$

となる。

ここで特に

$$\mathcal{W}(T_{\sqrt{2},1}) = 2\pi^2$$

が成り立っている。

$\mathbf{R}^4$ 内の 3 次元単位球面 $\mathbf{S}^3$ の北極 $N = {}^t(0,0,0,1)$ からの立体射影を σ とし、$\mathbf{R}^3$ を $\sigma(\mathbf{S}^3 \setminus \{N\})$ と見なす。$\mathbf{R}^3$ 内の閉曲面 M の、σ による逆像$\sigma^{-1}(M)$ を M_1 とおく。

H_1 を M_1 の $\mathbf{S}^3$ 内の曲面としての平均曲率、dS_1 を($\mathbf{S}^3$ から誘導される) M_1 の面積要素とする。

このとき、次が成り立つ。

$$\mathcal{W}(M) = \int_M H^2 dS = \int_{M_1} ({H_1}^2 + 1) dS_1$$

そこで

$$\mathcal{W}_1(M_1) := \int_{M_1} ({H_1}^2 + 1) dS_1$$

により、$\mathbf{S}^3$ 内の閉曲面のWillmore 汎関数を定義する。

$\mathcal{W}_1$ の停留曲面を$\mathbf{S}^3$ 内の Willmore 曲面と呼ぶ。

上記の回転トーラス $T_{\sqrt{2},1}$ に対し、

$$\begin{aligned} T_{1,C} &:= \sigma^{-1}(T_{\sqrt{2},1}) \\ &= \mathbf{S}^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \mathbf{S}^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; {x_1}^2 + {x_2}^2 = \frac{1}{2}, {x_3}^2 + {x_4}^2 = \frac{1}{2} \right\} \end{aligned}$$

が成り立つ。$T_{1,C}$ は Clifford トーラスと呼ばれる。

Weiner は、$T_{1,C}$ が実は$\mathbf{S}^3$ 内の極小曲面でもあることに留意して、$T_{1,C}$ における$\mathcal{W}_1$ の第二変分を計算し、$T_{1,C}$ がその極小点である、すなわち Willmore 予想が局所的には正しいことを示した。

そして、Marques-Neves は、$\mathbf{S}^3$ 内の種数 1 以上の任意の閉曲面 M_1 に対して、

$$\mathcal{W}_1(M_1) \geq 2\pi^2$$

が成り立つこと、さらに特に等号成立は、Clifford トーラス $T_{1,C}$ もしくはこれと $\mathbf{S}^3$ の共形変換で写り合う曲面の場合に限ることを証明した。

ところで、一般に埋め込まれていない(つまり自己交差のある)曲面 M_1 については、これを写像と見たときの$\mathbf{S}^3$ のある点の逆像がk 点集合であるならば、

$$\mathcal{W}_1(M_1) \geq 4\pi k$$

が成り立つことが、Li-Yau によって、既に示されていた。

一方、$8\pi > 2\pi^2$ であるから、$\mathcal{W}_1(M_1) = 2\pi^2$ が成立するためには、M_1 は埋め込みである(つまり自己交差がない) ことが要請されることになる。

そこで、Marques-Neves は、上述の主張を示すために、まず、$\mathbf{S}^3$ 内の埋め込まれた極小曲面に限定して主張を示し、さらに、$\mathcal{W}_1(M_1) < 8\pi$ である種数 1 以上の任意の閉曲面 M_1 に対して、これを連続変形して得られる極小曲面 $M_{1,0}$ で

$$\mathcal{W}_1(M_{1,0}) \leq \mathcal{W}_1(M_1)$$

を満たすものが存在する、すなわち $\mathcal{W}_1$ の最小値は、極小曲面によって実現されることを示した。

一方、同じ問題を、向き付け不可能な曲面について考えることもできる。特に M として射影平面 $\mathbf{R}P^2$ と同相な曲面を考えた場合については、まず

$$\mathcal{W}(M) \geq 12\pi$$

が成り立つことが、Li-Yau の結果を用いて先に示され、そして、等号が成立する例をKusner が具体的に構成した。

その際、用いられたのが、$\mathbf{R}^3$ の反転(3 次元球面 $\mathbf{S}^3$ の立体射影による座標近傍系の座標変換) による極小曲面の像がWillmore 曲面となると言う事実、並びに、極小曲面の平面型 end は、反転によって滑らかに拡張されると言うBryant の結果であった。

前半の事実は、元の極小曲面は非 compact ではあるが、$H \equiv 0$ であるから、偏微分方程式

$$\Delta H + 2(H^2 - K)H = 0$$

の解にはなっており、その意味では Willmore 曲面であることと、一方、反転は定義される範囲(反転の中心と中心の逆像以外) では共形変換であることによる。

そして、Bryant の結果と併せて特に、平面型 end のみを持つ $\mathbf{R}^3$ 内の完備極小曲面は、反転によって滑らかに compact 化され、本来の考察対象である閉曲面として扱えることになる。

Kuner は $\mathbf{R}^3$ 内で、射影平面からその奇数個の点を除いた曲面と同相で、その全ての end が平面型であるような完備極小曲面を構成した。

p を 3 以上の奇数とすると、Kusner の例は、次の Weierstrass data により実現される。

$$g(z) = \frac{z^{p-1}(z^p - s)}{sz^p + 1}, \qquad \eta = \sqrt{-1}\frac{(sz^p+1)^2}{(z^{2p} + rz^p - 1)^2}dz$$

但し、$s = \sqrt{2p-1}$, $r = \dfrac{2s}{p-1}$ である。

因みに、元は無限遠点であった p 個の end は、反転によって同じ点に写されるので、$\mathcal{W}$ の最小値を実現するには、$p = 3$ でなければならない。