曲線と曲面の幾何学（火５）・中間試験問題 (解答例)

学籍番号　　　　　　　　　　氏　名

（時間内に出来る）問題全てに解答して下さい。解答の作成にあたっては、途中の計算を省略しないで書くようにして下さい。

1　曲線 $x^2+2bxy+y^2=1$ が、短径と長径の比が $1:5$ であるような楕円となる b の値を求めよ。

$$A=\begin{pmatrix}1 & b\\ b & 1\end{pmatrix}$$

とおけば、

$$x^2+2bxy+y^2=(x,y)A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

と書ける。

ここで A は実対称行列なので、A の固有方程式

$$0=|\lambda E-A|=\lambda^2-2\lambda+1-b^2$$

は実数解 α,β ($\alpha\le\beta$) を持ち、A は、ある $P\in SO(2)$ により

$${}^tPAP=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$$

と対角化できて、この P を用いた座標変換

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}$$

により、曲線の方程式 $x^2+2bxy+y^2=1$ を $\alpha X^2+\beta Y^2=1$ と書き換えることができる。

従って、この曲線が題意を満たすためには

$$\alpha>0\quad かつ\quad \beta=25\alpha$$

が成り立てばよい。このとき二次方程式の解と係数の関係より

$$26\alpha=2,\qquad 25\alpha^2=1-b^2$$

なので、求める答は

$$b=\frac{12}{13}\ または\ -\frac{12}{13}$$

である。

2　弧長媒介変数で表示された曲線

$$X(t) = \begin{pmatrix} h(t) \\ \log \sin h(t) \end{pmatrix} \qquad (\, t \in \mathbf{R},\ 0 < h(t) < \pi \,)$$

について、次の各問に答えよ。

(1)　$h'(t) > 0$ のとき、$h(t)$ が満たす条件 (微分方程式) を求めよ。

$$X'(t) = \begin{pmatrix} h'(t) \\ \frac{h'(t)}{\tan h(t)} \end{pmatrix}$$

より

$$||X'(t)||^2 = h'(t)^2 \left(1 + \frac{1}{\tan^2 h(t)}\right) = \frac{h'(t)^2}{\sin^2 h(t)}$$

であるが、今 t は弧長パラメーターなので、

$$\frac{h'(t)^2}{\sin^2 h(t)} = 1$$

でなければばならない。仮定より $h'(t) > 0$ なので、求める条件は

$$h'(t) = \sin h(t)$$

である。

(2)　曲率を $h(t)$ を用いて表せ。

(1) より

$$X'(t) = \begin{pmatrix} \sin h(t) \\ \cos h(t) \end{pmatrix}$$

よって

$$X''(t) = \begin{pmatrix} h'(t) \cos h(t) \\ -h'(t) \sin h(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos h(t) \sin h(t) \\ -\sin^2 h(t) \end{pmatrix}$$

従って、曲率は

$$\begin{aligned} |X'(t)\ X''(t)| &= \sin h(t)(-\sin^2 h(t)) - \cos h(t) \sin h(t) \cdot \cos h(t) \\ &= -\sin h(t)(\sin^2 h(t) + \cos^2 h(t)) \ = \ -\sin h(t) \end{aligned}$$

3　ベクトル V_1, V_2, V_3 は、

$$V_1 = \begin{pmatrix} \frac{15}{17} \\ \frac{8}{17} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} -\frac{8}{17} \\ \frac{15}{17} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

で与えられるものとする。いずれも単位ベクトルであること、それぞれ直交することを認めて、次の各問に答えよ。

(1)　外積 $V_1 \times V_2, V_2 \times V_3$ を求めよ。

$$\begin{aligned} V_1 \times V_2 &= \begin{vmatrix} \frac{15}{17} & -\frac{8}{17} & \boldsymbol{e}_1 \\ \frac{8}{17} & \frac{15}{17} & \boldsymbol{e}_2 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{e}_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{15}{17} \cdot \frac{15}{17} + \frac{8}{17} \cdot \frac{8}{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = V_3 \\ V_2 \times V_3 &= \begin{vmatrix} -\frac{8}{17} & 0 & \boldsymbol{e}_1 \\ \frac{15}{17} & 0 & \boldsymbol{e}_2 \\ 0 & 1 & \boldsymbol{e}_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{17} \cdot 1 \\ -\left(-\frac{8}{17}\right) \cdot 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{17} \\ \frac{8}{17} \\ 0 \end{pmatrix} = V_1 \end{aligned}$$

(2)　$PV_1 = V_2, PV_2 = V_3, |P| = 1$ をみたす直交行列 P を求めよ。

$$PV_3 = P(V_1 \times V_2) = PV_1 \times PV_2 = V_2 \times V_3 = V_1$$

より

$$P(V_1\ V_2\ V_3) = (PV_1\ PV_2\ PV_3) = (V_2\ V_3\ V_1)$$

なので

$$\begin{aligned} P &= (V_2\ V_3\ V_1)(V_1\ V_2\ V_3)^{-1} = (V_2\ V_3\ V_1)\ {}^t(V_1\ V_2\ V_3) \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{8}{17} & 0 & \frac{15}{17} \\ \frac{15}{17} & 0 & \frac{8}{17} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{15}{17} & \frac{8}{17} & 0 \\ -\frac{8}{17} & \frac{15}{17} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{120}{289} & -\frac{64}{289} & \frac{15}{17} \\ \frac{225}{289} & \frac{120}{289} & \frac{8}{17} \\ -\frac{8}{17} & \frac{15}{17} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4　$X(t)$ $(t \in \mathbf{R})$ は弧長媒介変数表示された C^4 級空間曲線とし、その Frenet-Serret 枠を $X'(t), N(t), B(t)$ で表す。曲率は $\sigma(t) \neq 0$ で、また振率は $\tau(t)$ で、それぞれ表す。

行列式 $|B(t), B'(t), B''(t)|$ を、$\sigma(t)$, $\tau(t)$, $\sigma'(t)$, $\tau'(t)$ (の内、必要なもの) のみを用いて表せ。

Frenet-Serret の公式より、

$$B'(t) = 0 \cdot X'(t) - \tau N(t) + 0 \cdot B(t) = -\tau N(t)$$

が成り立つ。

これらの両辺を微分して、

$$\begin{aligned} B''(t) &= -\tau' N(t) - \tau N'(t) \\ &= -\tau' N(t) - \tau(-\sigma X'(t) + \tau B(t)) \\ &= \sigma\tau X'(t) - \tau' N(t) - \tau^2 B(t) \end{aligned}$$

を得る。

よって、

$$(B(t), B'(t), B''(t)) = (X'(t), N(t), B(t)) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma\tau \\ 0 & -\tau & -\tau' \\ 1 & 0 & -\tau^2 \end{pmatrix}$$

より、

$$\begin{aligned} |B(t), B'(t), B''(t)| &= |X'(t), N(t), B(t)| \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & \sigma\tau \\ 0 & -\tau & -\tau' \\ 1 & 0 & -\tau^2 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot \{0 \cdot (-\tau') - \sigma\tau \cdot (-\tau)\} \\ &= \sigma\tau^2 \end{aligned}$$

を得る。