曲線と曲面の幾何学・講義ノート

$\boxed{\text{第 1 回}}$

(2024年10月 1日(火)配信分)

　この講義ノートは、2005年度、数学科カリキュラムの改訂を機に「曲線と曲面の幾何学」の講義を立ち上げるに当たって、その準備ノートとして作成したものの改訂版である。

目次

　本文中、問の番号が飛んでいたり、相前後したりしているのは、別に用意した演習問題集と連動させているためである。本文中の問の類題や、公式の計算問題の他、発展問題も含めて、2024年度は計109問用意した。

§A. 線形代数の準備 1

本題に入る前に、主として 2 次元ベクトル空間について、必要な事項をおさらいしておこう。さらに、これから扱う平面曲線の典型的な例として、二次曲線とその分類について紹介しておこう。

正方行列 P が ${}^tPP = P{}^tP = E$ を満たすとき、直交行列であると言う。$1 = |E| = |{}^tPP| = |{}^tP| \cdot |P| = |P|^2$ より $|P| = \pm 1$ を満たす。n 次直交行列全体の集合を $O(n)$, $|P| = 1$ を満たす n 次直交行列全体の集合を $SO(n)$ と表す。これらは積に関して群をなし、それぞれ n 次直交群、n 次特殊直交群と呼ばれる。

定義から直ちに、直交行列 P の n 個の列ベクトルは n 次元ベクトル空間の正規直交基底をなす。またこのとき、直交行列となる。すなわち、列ベクトルがいずれも単位ベクトルで、互いに直交するような正方行列を直交行列と言うのである。

問 A.1　確かめよ。

一般に、n 次元（列）ベクトル空間において、直交行列 P を（左から）かける写像を直交変換と言う。任意のベクトル V と W の内積と直交行列 P の間に次の関係が成り立つ。

$$\langle PV, PW\rangle = {}^t(PW)PV = {}^tW\,{}^tPPV = {}^tWV = \langle V, W\rangle$$

すなわち、直交変換は内積を変えない。と言うことは距離や角度も変えないことになる。特に $|P| = 1$ のときは向きも変えない。

さて、高校で学んだように、一般に、 2 次元ベクトル $V = {}^t(v_1, v_2)$ を左回りに９０度回転したベクトルは、

$$\begin{vmatrix} v_1 & e_1 \\ v_2 & e_2 \end{vmatrix} = -v_2e_1 + v_1e_2 = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

で与えられる。（上記の行列式もどきの表示は、後で 3 次元と対比するために覚えておこう。）

今、 2 次の直交行列 P の第 1 列を ${}^t(\cos\theta, \sin\theta)$ と表すと、第 2 列はこれを左右いずれかに９０度回転させたベクトルであるから、左回りなら上で注意したことから、第 2 列は ${}^t(-\sin\theta, \cos\theta)$ となり、

$$P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

となる。このとき $|P| = 1$ すなわち $P \in SO(2)$ であり、また $SO(2)$ の任意の元はこの形で書ける。いわゆる 2 次元の回転を表す行列である。

さて、平面について考えよう。平面上の点は一般に 2 個の実数の組 ${}^t(x, y)$ で表された。これは原点 ${}^t(0, 0)$ から、x-軸正方向に x, y-軸正方向に y, それぞれ進んだ場所であって、平面を 2 次元ベクトル空間と考えれば、この組は位置ベクトルを表しているともとれる。これを標準基底 e_1, e_2 の線形結合 $xe_1 + ye_2$ と表しておこう。

さて、今同じ点を、別の正規直交基底 V_1, V_2 で表すことを考えよう。基底の定義より、

$$XV_1 + YV_2 = xe_1 + ye_2$$

を満たす実数の組 (X, Y) がただ一つ存在する。これは、原点を通り、V_1, V_2 各方向に伸びる直線を新しい座標軸にとったときの、座標であると言える。

ここで $P = (V_1, V_2)$ とおくと、P は直交行列であり、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xe_1 + ye_2 = XV_1 + YV_2 = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

より、元の座標と新しい座標の関係が、直交行列 P との積で与えられることがわかる。

さらに、原点も変えたいときは、平行移動を組み合わせ、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

とすればよい。

このように、座標軸及び原点を取り替えることを座標変換と言う。ここで考えた直交変換と平行移動を組み合わせた向きを変えない合同変換による座標変換は、新しい座標で表しても、直観的な意味で形も大きさも変えないと言える座標変換である。