曲線と曲面の幾何学・講義ノート

$\boxed{\text{第２回}}$

(2024年10月 8日(火)配信分)

§A. 線形代数の準備１(続き)

さて、線形代数もしくは代数学の講義で、既に学んだことと思うが、実対称行列は直交行列により対角化可能である。もう少し丁寧に言うと、実対称行列 A に対し、${}^tPAP$ が対角行列となるような直交行列 P が選べるのである。ここで特に $|P| = 1$ であるものが選べる。

このことを用いて、2 変数の二次方程式

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

により表される平面図形、いわゆる二次曲線を分類してみよう。二次と言う以上、a, b, c の内、少なくとも一つは 0 でないと仮定する。

ここで分類と言うのは、合同もしくは相似でないものはどれ位の種類があるか考えると言うことである。では合同とは何かと言うと、これは直交変換と平行移動の組合せで移り合うと言うことであり、相似とはこれに拡大縮小を加えたものである。

さて、上記の目的のために、左辺の二次式を座標変換により、より簡単な形に書き換えてみよう。ここで

$$A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$$

とおけば、上の二次式は

$$(x, y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (d, e) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f$$

と書ける。一方ここで A は実対称行列なので、ある $P \in SO(2)$ により

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

と対角化できる。（ここで A は零行列ではないので、$\lambda \neq 0$ としてよい。）

そこで、${}^t(x, y) = P^t(X, Y)$ を二次式に代入してみれば、

$$(X, Y)^t PAP \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + (d, e)P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + f = \lambda X^2 + \mu Y^2 + \alpha X + \beta Y + f$$

ただし、$\alpha = dp_{11} + ep_{21}$, $\beta = dp_{12} + ep_{22}$ とおいた。どう簡単になったのかと言えば、複数の変数を含む XY の項が無い形になったと言うことである。

　ここでさらに、二次の項が消えていない変数については、完全平方を考えて、原点をずらす平行移動による座標変換を行えば、一次の項も無い形にできる。例えば今、$\lambda \neq 0$ を仮定しているので、X に関連する項は、

$$\lambda X^2 + \alpha X = \lambda(X + \frac{\alpha}{2\lambda})^2 - \frac{\alpha^2}{4\lambda}$$

となり、さらに$\mu \neq 0$ も成り立っていれば、Y に関連する項は、

$$\mu Y^2 + \beta Y = \mu(Y + \frac{\beta}{2\mu})^2 - \frac{\beta^2}{4\mu}$$

であるから、${}^t(x, y) = P^t(X, Y)$ の代わりに ${}^t(x, y) = P^t(X + \alpha/2\lambda, Y + \beta/2\mu)$ を初めの二次式に代入すれば、

$$\lambda X^2 + \mu Y^2 + C$$

の形で表せるのである。

また、$\mu = 0,\ \beta \neq 0$ の場合には、
${}^{t}(x, y) = P\,{}^{t}(X + \alpha/2\lambda, Y + f/\beta)$ を初めの二次式に代入すれば、
定数項が無い

$$\lambda X^2 + \beta Y$$

の形になり、$\mu = 0,\ \beta = 0$ の場合には、
${}^{t}(x, y) = P\,{}^{t}(X + \alpha/2\lambda, Y)$ を初めの二次式に代入すれば、

$$\lambda X^2 + f$$

の形になる。

以上より結局、始めの方程式は、次のいずれかに書き換えられることがわかった。

(1) $\lambda X^2 + \mu Y^2 + C = 0\ (\lambda\mu > 0)$

(2) $\lambda X^2 + \mu Y^2 + C = 0\ (\lambda\mu < 0)$

(3) $\lambda X^2 + \beta Y = 0\ (\lambda \neq 0, \beta \neq 0)$

(4) $\lambda X^2 + f = 0\ (\lambda \neq 0)$

　さて、これらの式が表す図形であるが、

(1) で $\lambda C < 0$ のときは楕円（ただし $\lambda = \mu$ のときは円周）、$C = 0$ のときは一点、$\lambda C > 0$ のときは $\emptyset$ である。

(2) で $C \neq 0$ のときは双曲線、$C = 0$ のときは交わる二直線である。

(3) のときは放物線である。

(4) で $\lambda f < 0$ のときは平行な二直線、$C = 0$ のときは直線（重なった二直線）、$\lambda f > 0$ のときは $\emptyset$ である。

　いずれの場合も、係数が異なれば、一般には合同ではないが、それらを同じ種類と見なせば、これで、実質的には二次曲線は、楕円、双曲線、放物線の三種類しかないことがわかった。

問 A.2　二次式 xy を、上の対角化により座標変換せよ。

問 A.10　$b \neq 0$ のとき、曲線 $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$ は、円とはならないことを示せ。

問 A.16　(2) で直角双曲線となる（漸近線が直交する）ための必要十分条件を求めよ。

座標変換する前の係数を用いて表せ。

問 A.19　(3) で与えられる全ての放物線は、互いに相似であることを示せ。

3 変数の二次方程式について、同様のことを行うと、今度は二次曲面の分類ができる。

問A.21　試みよ。

(略解)　次のいずれかに書き換えられる。

(1) $\lambda X^2 + \mu Y^2 + \nu Z^2 + C = 0$ （ λ, μ, ν は同符号）

(2) $\lambda X^2 + \mu Y^2 + \nu Z^2 + C = 0$ （ λ, μ と ν は異符号）

(3) $\lambda X^2 + \mu Y^2 + \beta Z = 0$ （ λ, μ は同符号、 $\beta \neq 0$ ）

(4) $\lambda X^2 + \mu Y^2 + \beta Z = 0$ （ λ, μ は異符号、 $\beta \neq 0$ ）

(5) 変数 Z を含まない形。

これらの式が表す図形は、

(1) で $\lambda C < 0$ のときは楕円面（ただし $\lambda = \mu = \nu$ のときは球面)、$C = 0$ のときは一点、$\lambda C > 0$ のときは $\emptyset$ である。

(2) で $\lambda C < 0$ のときは一葉双曲面、$C = 0$ のときは楕円錐、$\lambda C > 0$ のときは二葉双曲面である。

(3) のときは楕円放物面である。

(4) のときは双曲放物面である。

(5) のときは二次曲線と同じ式になるので、二次曲線の柱面（楕円柱、直線、 $\emptyset$ ／双曲柱面、交わる二平面／放物柱面／平行な二平面、（重なった二）平面、 $\emptyset$ ）になる。

第１回の問の解答

問A.1

n 次正方行列 P の列ベクトルを $V_1, V_2, \ldots, V_n$ とし、$P = (V_1, V_2, \ldots, V_n)$ と表せば、${}^tPP$ の (i, j) 成分は ${}^tV_iV_j = \langle V_i, V_j \rangle$ となる。

従って ${}^tPP = E$ となるための必要十分条件は

$$\langle V_i, V_j \rangle = \delta_{ij}$$

である。