

# 曲線と曲面の幾何学・講義ノート

第3回

(2024年10月15日(火)配信分)

## §1. 平面曲線

この § では平面曲線の曲率について考える。数学の教科書は、往々にして優雅に泳ぐ白鳥の姿のみを写しているように見える。でも、ここでは水面下でのばたばたから始めたい。その方が泳ぐことの意味も体感できると思うからである。スキーに例えればパラレルだけ説明されても、初心者は普通やっぱりボーゲンから始めないとつらいのである。と言うわけで最初は泥臭い考察から曲率を定義し、後から多少格好のよい定義に切り替える。と言ってもそれらは結局は同じ物である。

曲線と言えばこれまで主として関数  $y = f(x)$  のグラフを考えて来た。計算の都合上以下  $f$  は  $C^2$  級であると仮定しよう。さて、グラフの凹凸を調べるために二次導関数を用いたことを思い出してみよう。これがグラフの曲がり具合を表していたと言えないこともない。しかし、たとえば  $f(x) = x^2$  のとき、 $f''(x) = 2$  は一定であるが、グラフの放物線の曲がり具合は、どう見ても一定とは言い難い。

なぜそのようなことになるかと言えば、グラフの傾き、或いは傾きが急なときの、 $\Delta x$  あたりの曲線の長さを、考慮に入れていなかったからである。

そこで、各点毎に座標軸を取り替えると言う離れ業を使うことにする。離れ業と言っても線形代数を知っている者にとっては、それは大したことではない。少々面倒くさいだけのことである。

さて、関数  $y = f(x)$  のグラフの点  ${}^t(x_0, f(x_0))$  が原点に来るよう平行移動による座標変換を行えば、

$$y + f(x_0) = f(x + x_0)$$

となる。さて、新しい原点における正方向の接ベクトルは  ${}^t(1, f'(x_0))$ 、進行方向左側の法ベクトルは  ${}^t(-f'(x_0), 1)$  である。これらを絶対値で割って単位ベクトルとしたものがそれぞれ  ${}^t(1, 0)$ ,  ${}^t(0, 1)$  となるような座標変換を考える。

新しい座標を  ${}^t(X, Y)$  で表すと、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{1 + f'(x_0)^2}} \begin{pmatrix} 1 & -f'(x_0) \\ f'(x_0) & 1 \end{pmatrix}$$

である。座標変換後の曲線を表す式は、次のようになる。

$$\frac{1}{\sqrt{1 + f'(x_0)^2}}(f'(x_0)X + Y) + f(x_0) = f\left(\frac{1}{\sqrt{1 + f'(x_0)^2}}(X - f'(x_0)Y) + x_0\right)$$

原点の近くでは  $Y$  は  $X$  の関数で書けていることを見越して、両辺を  $X$  で微分してみると、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{1 + f'(x_0)^2}} \left( f'(x_0) + \frac{dY}{dX} \right) \\ &= f' \left( \frac{1}{\sqrt{1 + f'(x_0)^2}} (X - f'(x_0)Y) + x_0 \right) \frac{1}{\sqrt{1 + f'(x_0)^2}} \left( 1 - f'(x_0) \frac{dY}{dX} \right) \end{aligned}$$

より

$$f'(x_0) + \frac{dY}{dX} = f' \left( \frac{1}{\sqrt{1 + f'(x_0)^2}} (X - f'(x_0)Y) + x_0 \right) \left( 1 - f'(x_0) \frac{dY}{dX} \right)$$

もう一度  $X$  で微分してみると、

$$\begin{aligned} \frac{d^2Y}{dX^2} &= f'' \left( \frac{1}{\sqrt{1 + f'(x_0)^2}} (X - f'(x_0)Y) + x_0 \right) \frac{1}{\sqrt{1 + f'(x_0)^2}} \left( 1 - f'(x_0) \frac{dY}{dX} \right)^2 \\ &\quad + f' \left( \frac{1}{\sqrt{1 + f'(x_0)^2}} (X - f'(x_0)Y) + x_0 \right) \left( -f'(x_0) \frac{d^2Y}{dX^2} \right) \end{aligned}$$

$X = 0$  では  $Y = 0$ ,  $dY/dX = 0$  を代入すれば、

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'(x_0)^2}} f''(x_0) - f'(x_0)^2 \frac{d^2Y}{dX^2}$$

より、

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{f''(x_0)}{(1 + f'(x_0)^2)^{3/2}}$$

これが座標軸を接線と法線にあわせた時の、二階微分係数を与える式である。この値を曲線  $y = f(x)$  の点  $t(x_0, f(x_0))$  における曲率の定義としたい。

初めの例  $f(x) = x^2$  について計算してみると  $2/(1 + 4x^2)^{3/2}$  となり、遠くへ行くほど曲率は 0 に近づく。これなら見た感じにも合う。

**問1.6(1)(へ)** 直角双曲線  $xy = 1$  の曲率を計算せよ。

曲線上は左から右へ進むものとする。

ここで、曲率が一定となる曲線は何か考えてみたい。それは、定数  $c$  に対して常微分方程式

$$\frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}} = c$$

を解く問題に相当する。これは一見二階であるが、式の中に  $f$  が含まれていない上、既に変数分離されているので、実は解くのはさほど難しくない。実際  $z = f'(x)$  とおけば、

$$\frac{dz}{(1 + z^2)^{3/2}} = c dx$$



両辺を積分して、 $z = \tan \theta$  で置換すれば、

$$c \int dx = \int \cos \theta d\theta$$

より、

$$cx = \sin \theta + c' = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} + c'$$

よって、 $c \neq 0$  なら

$$\frac{dy}{dx} = z = \pm \frac{cx - c'}{\sqrt{1 - (cx - c')^2}} = \mp \frac{1}{cdx} \sqrt{1 - (cx - c')^2}$$

より、

$$y = \mp \frac{1}{c} \sqrt{1 - (cx - c')^2} + c''$$

を得る。従って曲線は（任意の中心を持つ）半径  $1/|c|$  の円  $(cx - c')^2 + c^2(y - c'')^2 = 1$  の全体または一部でなければならない。

一方  $c = 0$  なら、

$$\frac{dy}{dx} = z = \mp \frac{c'}{\sqrt{1 - c'^2}}$$

より

$$y = \mp \frac{c'}{\sqrt{1 - c'^2}}x + c''$$

よって、任意の直線ということになる。以上より**定曲率曲線**は円か直線であることがわかった。

任意の曲線に対して、その曲率の逆数を**曲率半径**と呼ぶ。これは、曲線の各点で最も曲がり具合の近い円で近似したときの円の半径という意味である。近似する円を**曲率円**と呼ぶ。

さて、ここで円が登場したことからも、一般の曲線を表すには、関数のグラフとしてでなく、媒介変数表示の方がよさそうである。そこで、先に計算した曲率の定義をその場合に書き換えてみよう。曲線  $X(t) = {}^t(x(t), y(t))$  が局所的には  $y = f(x)$  と表されたとすると、 $y(t) = f(x(t))$  が成り立つので

$$y'(t) = f'(x(t))x'(t), \quad y''(t) = f''(x(t))x'(t)^2 + f'(x(t))x''(t)$$

より、

$$f'(x(t)) = \frac{y'(t)}{x'(t)}, \quad f''(x(t)) = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{x'(t)^3}$$

これを先の定義に代入すれば、

$$\frac{\frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{x'(t)^3}}{\left\{1 + \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2\right\}^{3/2}} = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}$$

を得る。曲線（の接線）が垂直に立っているところでも、この式でよいことは、 $x$  と  $y$  を入れ換えて考えれば、容易に確かめられる。

**問1.1(1)** 楕円  $X(t) = {}^t(a \cos t, b \sin t)$  ( $a, b > 0$ ) の曲率を計算せよ。

## 第2回の問の解答

### 問A.2

行列  $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$  の固有方程式は  $\lambda^2 - \frac{1}{4} = 0$  より、固有値は  $1/2, -1/2$  である。それぞれの固有ベクトルとして  $\mathbf{p}_1 := {}^t(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), \mathbf{p}_2 := {}^t(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$  をとれば

$$P = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

は直交行列で  $|P| = 1$ , ここで

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} X - Y \\ X + Y \end{pmatrix}$$

とおけば  $xy = (X^2 - Y^2)/2$  を得る。

## 問 A.10

行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  の固有方程式は

$$\lambda^2 - (a + c)\lambda + (ac - b^2) = 0$$

より、その判別式は

$$D = (a + c)^2 - 4(ac - b^2) = (a - c)^2 + 4b^2$$

である。ところが今  $b \neq 0$  より  $D > 0$  なので、固有方程式が重解を持たないので円とはならない。

## 問 A.16

双曲線  $\lambda X^2 + \mu Y^2 + C = 0$  ( $\lambda\mu < 0, C \neq 0$ ) の漸近線は  $\lambda X^2 + \mu Y^2 = 0$  より

$$Y = \pm \sqrt{-\frac{\lambda}{\mu}} X$$

で、これらが直交するための必要十分条件は

$$-1 = \sqrt{-\frac{\lambda}{\mu}} \times \left(-\sqrt{-\frac{\lambda}{\mu}}\right) = \frac{\lambda}{\mu}$$

より  $\lambda + \mu = 0$  である。

この条件を、座標変換する前の係数を用いて表すと、行列  $A$  の固有方程式  $\lambda^2 - (a + c)\lambda + (ac - \frac{b^2}{4}) = 0$  の解と係数の関係より  $\lambda + \mu = a + c$  なので、やはり  $a + c = 0$  となる。

## 問 A.19

任意に二つの放物線

$$\lambda_1 X^2 + \beta_1 Y = 0 \quad (\lambda_1 \neq 0, \beta_1 \neq 0)$$

$$\lambda_2 X^2 + \beta_2 Y = 0 \quad (\lambda_2 \neq 0, \beta_2 \neq 0)$$

をとる。 $k \neq 0$  に対し、前者を、原点を中心として  $k$  倍拡大 ( $|k| < 1$  のときは縮小、 $k < 0$  のときはさらに180度回転、いずれも相似変換) した曲線は

$$\lambda_1 \left(\frac{X}{k}\right)^2 + \beta_1 \left(\frac{Y}{k}\right) = 0$$

すなわち  $\lambda_1 X^2 + k\beta_1 Y = 0$  と表される放物線である。これが後者と一致するための条件は  $\lambda_1 : \lambda_2 = k\beta_1 : \beta_2$  より  $k = \frac{\lambda_1 \beta_2}{\lambda_2 \beta_1}$  であるが、このような  $k$  は、いつでもとれる。