曲線と曲面の幾何学・講義ノート

$\boxed{\text{第４回}}$

(2024年10月22日(火)配信分)

$\boxed{\text{§1. 平面曲線(続き)}}$

さて、速度ベクトル $X'(t) = {}^t(x'(t), y'(t))$ が単位ベクトルとなるような媒介変数を弧長媒介変数と呼ぶ。t が弧長媒介変数のとき、

$$\langle X'(t), X'(t)\rangle = x'(t)^2 + y'(t)^2 = 1$$

の両辺を t で微分すると、

$$2\langle X'(t), X''(t)\rangle = 2(x'(t)x''(t) + y'(t)y''(t)) = 0$$

より、速度ベクトル $X'(t)$ と加速度ベクトル $X''(t)$ は直交する。

一方、曲率の定義は、

$$y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t) = \langle N(t), X''(t)\rangle = \begin{vmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{vmatrix} = |X'(t), X''(t)|$$

となり、曲率が左側の単位法ベクトル $N(t) = {}^t(-y'(t), x'(t))$ と加速度ベクトル $X''(t)$ との内積、すなわち、加速度ベクトルの大きさを進行方向左側を正として測ったものであることを意味している。今後、こちらを定義としてもよい。以下、曲率も弧長媒介変数表示で $\sigma(t)$ と表すことにする。

問 **1.9** $a, b > 0$ とする。弧長媒介変数で表示された楕円 $X(t) = {}^t(a\cos\varphi(t), b\sin\varphi(t))$ $(t \in \mathbf{R})$ について、次の各問に答えよ。

(1) $\varphi(t)$ が満たす条件(微分方程式)を求めよ。

(2) 曲率を $a, b, \varphi'(t)$ を用いて表せ。

さて、小学校か中学校で、三角形の内角の和は１８０度とか、四角形の内角の和は３６０度とか、と同時に多角形の外角の和は３６０度と言う性質について学んだことを思い出そう。この性質を辺がまっすぐでない場合に一般化してみたい。

弧長媒介変数表示された C^2 級曲線において、速度ベクトルの各成分は C^1 級であり、常に単位ベクトルであることから、C^1 級関数 $\theta(t)$ と、回転を表す行列

$$P(\theta(t)) = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) \end{pmatrix}$$

により、$X'(t) = P(\theta(t))X'(t_0)$ と書ける。実際、

$$
\begin{aligned}
P &= \begin{pmatrix} x'(t) & -y'(t) \\ y'(t) & x'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t_0) & -y'(t_0) \\ y'(t_0) & x'(t_0) \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} x'(t) & -y'(t) \\ y'(t) & x'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t_0) & y'(t_0) \\ -y'(t_0) & x'(t_0) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \langle X'(t_0), X'(t) \rangle & -\left| X'(t_0), X'(t) \right| \\ \left| X'(t_0), X'(t) \right| & \langle X'(t_0), X'(t) \rangle \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

とおけば $X'(t) = PX'(t_0)$ で、そこで、

$$
\theta(t) = \cos^{-1}\langle X'(t_0), X'(t) \rangle = \sin^{-1} \left| X'(t_0), X'(t) \right|
$$

ととればよい。（行列式の絶対値は、列ベクトルの作る平行四辺形の面積であったことを思い出そう。）

ここで $X''(t) = (P(\theta(t)))' X'(t_0)$ で、

$$\frac{d}{dt}P(\theta(t)) = \theta'(t)\begin{pmatrix} -\sin\theta(t) & -\cos\theta(t) \\ \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) \end{pmatrix}$$

より、

$$X''(t) = \theta'(t)P(\theta(t))\begin{pmatrix} -y'(t_0) \\ x'(t_0) \end{pmatrix} = \theta'(t)P(\theta(t))N(t_0)$$

よって、曲率は

$$\begin{aligned}\sigma(t) = |X'(t), X''(t)| \ &= \ |P(\theta(t))X'(t_0), \theta'(t)P(\theta(t))N(t_0)| \\ = \theta'(t)|P(\theta(t))| \cdot |X'(t_0), N(t_0)| \ &= \ \theta'(t)\end{aligned}$$

と一致する。従って、

$$\int_{t_0}^{t_1} \sigma(t)dt = \theta(t_1) - \theta(t_0)$$

すなわち、曲率の積分は一般に、始点と終点の速度ベクトルの偏角の差に一致する。特に始点と終点の速度ベクトルが一致する閉曲線に対しては、曲率の積分は 2π の整数倍となる。この整数を回転数と言う。

特に有界領域を左回りに囲む時はちょうど 2π に一致する。区分的に C^2 級のときは、各角における方向転換の角度と、曲率の積分を足したものがちょうど 2π となる。

そうなることを示すには、角が無い場合は円周に、角がある場合は多角形に、連続的に変形することを考えればよい。上記の積分は、これらの変形について連続的に変わるが、一方、 2π の整数倍と言う飛び飛びの値しかとらないので、結局同じ値しかとることができない。よってその値は、円周または多角形における 2π と一致する。

これは、多角形の外角の和は 2π であると言う公式の一般化になっている。これらにおいては回転数は 1 である。

８の字型の四角形については、同様のことが成り立たなかった。これは回転数が 0 の場合となっている。８の字の曲線では一般に、曲率の積分は 0 である。

ここで得た公式は、平面上の話であるが、さらに曲面上に一般化されGauss-Bonnet の定理と呼ばれる。この定理は §4 で紹介する。

一般に C^3 級の正則曲線（ $X'(t) \neq 0$ ）において、曲率の微分が 0 となる点を頂点と呼ぶ。閉曲線の場合、曲率が最大となる点と最小となる点を考えれば、頂点が少なくとも 2 個あることはわかる。

実際、８の字の曲線においては、頂点はちょうど 2 個である。ところが、有界領域を囲む単純閉曲線においては、一般に頂点は 4 個以上あることが知られている。

問1.6(2)(ヘ)　直角双曲線 $xy = 1$ の頂点を求め、その大まかな位置を図示せよ。

問1.1(2)　問 1.1(1) の（弧長でない）媒介変数で表示された楕円について、頂点を求めよ。

問1.5　$a > 0$ とする。極座標で $r = a\theta\ (\theta \geq 0)$ と表される曲線を Archimedes の螺線と呼ぶ。次の各問に答えよ。

(1)　曲率を計算せよ。

(2)　Archimedes の螺線は、$\theta \neq 0$ で頂点を持たないことを確かめよ。

第３回の問の解答

問1.6(1)(へ)

$f(x) = x^{-1}$ を定義の式に代入すれば

$$\frac{f''(x)}{(1+f'(x)^2)^{3/2}} = \frac{2x^3}{(x^4+1)^{3/2}}$$

問1.1(1)

${}^t(x(t), y(t)) = {}^t(a\cos t, b\sin t)$ を公式に代入すれば

$$\frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}} = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}$$