曲線と曲面の幾何学・講義ノート

$\boxed{\text{第５回}}$

(2024年10月29日(火)配信分)

§B. 線形代数の準備２

空間曲線や曲面を扱う前に、それらの考察に必要な線形代数の準備をしておこう。主な内容は三次元ベクトル空間の外積と直交行列（変換）である。

二つの三次元の列ベクトル $V = {}^t(v_1, v_2, v_3)$, $W = {}^t(w_1, w_2, w_3)$ に対し、それらの外積を次式で定義する。

$$V \times W = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 & e_1 \\ v_2 & w_2 & e_2 \\ v_3 & w_3 & e_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix}$$

定義より直ちに

$$(a_1V_1 + a_2V_2) \times W = a_1V_1 \times W + a_2V_2 \times W$$

が従う。

また$W \times V = -V \times W$ も従う。特に $V = W$ ととれば、$V \times V = 0$ を得る。これらより、さらに一般にV と W が平行ならば、$V \times W = 0$ が成り立つ。

定義より次の公式も容易に示せる。

$$\langle V \times W, U \rangle = |V, W, U|$$

問B.1 示せ。

これをV, W, U の三重積と言う。特に $U = V, W, V \times W$ ととれば、$\langle V \times W, V \rangle = |V, W, V| = 0$, $\langle V \times W, W \rangle = |V, W, W| = 0$ および

$$|V, W, V \times W| = \langle V \times W, V \times W \rangle = \|V \times W\|^2 \geq 0$$

を得る。

定義より次の公式も容易に示せる。

$$\langle V, W\rangle^2 + \|V \times W\|^2 = \|V\|^2\|W\|^2$$

問 B.2　示せ。

これから、

$$\begin{aligned}\|V \times W\|^2 &= \|V\|^2\|W\|^2 - \langle V, W\rangle^2 \\ &= \|V\|^2\|W\|^2 - \|V\|^2\|W\|^2 \cos^2\theta \\ &= (\|V\| \cdot \|W\| \sin\theta)^2\end{aligned}$$

を得る。

まとめると、$V \times W$ は V, W 両方と直交するベクトルで、その絶対値は V と W が作る平行四辺形の面積に一致する。V と W が平行でない限り、$V, W, V \times W$ は三次元ベクトル空間の基底をなし、その配置は右手系、すなわち右手の親指、人差指、中指の配置となる。

今、任意の $P \in SO(3)$ に対し、その列ベクトルを V_1, V_2, V_3 とおくと、これらは右手系をなし、特に $V_3 = V_1 \times V_2$ と書ける。

逆に、$\|V_1\| = \|V_2\| = 1$, $\langle V_1, V_2 \rangle = 0$ を満たす V_1, V_2 に対し、$(V_1, V_2, V_1 \times V_2) \in SO(3)$ が成り立つ。

さらに、$\|V_1\| = \|V_2\| = \|W_1\| = \|W_2\| = 1$, $\langle V_1, V_2 \rangle = \langle W_1, W_2 \rangle = 0$ を満たす V_1, V_2, W_1, W_2 に対し、

$$\begin{aligned} P &= (W_1, W_2, W_1 \times W_2)\,(V_1, V_2, V_1 \times V_2)^{-1} \\ &= (W_1, W_2, W_1 \times W_2)\,{}^t(V_1, V_2, V_1 \times V_2) \end{aligned}$$

とおくと、$P \in SO(3)$ で $PV_1 = W_1$, $PV_2 = W_2$ を満たす。

問 B.3　確かめよ。

　任意のベクトル V と W の内積と直交行列 P の間に $\langle PV, PW\rangle = \langle V, W\rangle$ なる関係が成り立つことは既に見たが、任意のベクトル V と W の外積と直交行列 P の間についても次の関係が成り立つ。

$$P(V \times W) = PV \times PW$$

実際、外積の性質から、$PV \times PW$ は PV, PW と直交する。一方、$V \times W$ は V, W と直交するので、内積と直交行列の性質から、$P(V \times W)$ は PV, PW と直交する。よって、$P(V \times W)$ と $PV \times PW$ は平行である。

ここで、

$$\begin{aligned}\langle PV \times PW, P(V \times W)\rangle &= |PV, PW, P(V \times W)| \\ &= |P| \cdot |V, W, V \times W| \\ &= 1 \cdot \langle V \times W, V \times W\rangle \\ &= \langle P(V \times W), P(V \times W)\rangle\end{aligned}$$

より $P(V \times W)$ と $PV \times PW$ は一致することがわかる。

　関数を成分とするベクトルや行列の微分について、少し見ておこう。まず微分そのものであるが、これは、

$$V'(t) = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} {v_1}'(t) \\ {v_2}'(t) \\ {v_3}'(t) \end{pmatrix}$$

$$P'(t) = \frac{d}{dt}\left(V_1(t), V_2(t), V_3(t)\right) \ = \ \left({V_1}'(t), {V_2}'(t), {V_3}'(t)\right)$$

のように、各成分毎に微分すると約束しておく。

　このとき、内積、外積、行列の積、行列式それぞれの微分について、元々の積の微分の公式より、次が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
(\langle V_1(t), V_2(t)\rangle)' &= \langle {V_1}'(t), V_2(t)\rangle + \langle V_1(t), {V_2}'(t)\rangle \\
(V_1(t) \times V_2(t))' &= {V_1}'(t) \times V_2(t) + V_1(t) \times {V_2}'(t) \\
(P(t)Q(t))' &= P'(t)Q(t) + P(t)Q'(t) \\
|P(t)|' &= \frac{d}{dt}\,|V_1(t), V_2(t), V_3(t)| \\
&= |{V_1}'(t), V_2(t), V_3(t)| + |V_1(t), {V_2}'(t), V_3(t)| \\
&\qquad\qquad + |V_1(t), V_2(t), {V_3}'(t)|
\end{aligned}
$$

特に $\|V(t)\|$ が t によらず一定のとき、

$$
\begin{aligned}
0 = (\|V(t)\|^2)' \; &= \; (\langle V(t), V(t)\rangle)' \\
= \langle V'(t), V(t)\rangle + \langle V(t), V'(t)\rangle \; &= \; 2\langle V(t), V'(t)\rangle
\end{aligned}
$$

より、$V'(t)$ が $V(t)$ と直交することがわかる。

第４回の問の解答

問1.9

(1)　$X(t) = {}^t(a\cos\varphi(t), b\sin\varphi(t))$ を $||X'(t)||^2 = 1$ に代入すれば

$$(a^2\sin^2\varphi(t) + b^2\cos^2\varphi(t))\varphi'(t)^2 = 1$$

(2)　公式に代入すれば

$$|X'(t)\ X''(t)| = ab\varphi'(t)^3$$

問1.6(2)(へ)

　前回求めた曲率を x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{2x^3}{(x^4+1)^{3/2}}\right\} = \frac{-6x^2(x^2-1)}{(x^4+1)^{5/2}}$$

で、これが 0 となるのは$x=0,\pm1$ のときである。ただし $x=0$ では曲線は定義されていないので、頂点は ${}^t(x,y)={}^t(\pm1,\pm1)$ である。

　図は省略するが、言うまでも無く、直線 $y=x$ との交点である。直角双曲線 $xy=1$ が、この直線に関して線対称であることは重要なポイント。

問1.1(2)

前回求めた曲率を t で微分すると

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}\right\} = \frac{-3ab(a^2-b^2)\sin 2t}{2(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{5/2}}$$

で、$a=b$ (つまり円) のときは全ての点で 0, $a \neq b$ のとき、これが 0 となるのは $t = \frac{n}{2}\pi\ (n \in \mathbf{Z})$ のときである。従って頂点は ${}^t(x,y) = {}^t(\pm a, 0), {}^t(0, \pm b)$ である。

問1.5

(1) $\quad {}^t(x(t), y(t)) = {}^t(a\theta\cos\theta, a\theta\sin\theta)$ を公式に代入すれば

$$\frac{y''(\theta)x'(\theta) - y'(\theta)x''(\theta)}{(x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2)^{3/2}} = \frac{\theta^2 + 2}{a(\theta^2 + 1)^{3/2}}$$

(2) 上で求めた曲率を θ で微分すると

$$\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{\theta^2 + 2}{a(\theta^2 + 1)^{3/2}}\right\} = \frac{-\theta(\theta^2 + 4)}{a(\theta^2 + 1)^{5/2}}$$

で、これが 0 となるのは $\theta = 0$ のときに限る。