曲線と曲面の幾何学

第５回追加資料

(10月29日)

今回の追加資料は、線形代数Iでの講義内容を再編集したものです。講義ノートでの復習だけではわかりにくい人は、こちらを参考にして下さい。

今回は、3 次元ベクトルの外積についてお話します。教科書によっては、行ベクトルで説明していますが、これまでの流れや、この後とのつながりを考えて、ここでは列ベクトルで説明します。と言っても、全て転置すればよいだけで、本質的に異なるものではありません。

2 個の 3 次元列ベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$$

に対して、何でもよいのでもう 1 個、3 次元列ベクトル

$$\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

を用意して、3 次正方行列

$$A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

を作ります。

その $(i,3)$ 余因子($i=1,2,3$)を、余因子行列 $\widetilde{A}$ を作るときのようにわざわざ転置しないで、そのまま並べた列ベクトルを、$\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ の外積と呼び、$\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2$ で表します。$(i,3)$ 余因子は、第 i 行と第 3 列を取り除いて計算されるので、$\boldsymbol{a}_3$ の選び方には一切影響されません。

$$\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{13} \\ \tilde{a}_{23} \\ \tilde{a}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} \\ -(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) \\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix}$$

ですが、

$$\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \boldsymbol{e}_1 \\ a_{21} & a_{22} & \boldsymbol{e}_2 \\ a_{31} & a_{32} & \boldsymbol{e}_3 \end{vmatrix}$$

と覚えられます。

ここで

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

です。

教科書によっては、この後触れる外積の性質を定義にしていますが、この覚え方の式を定義としている本も多いようです。

ちょっと紛らわしいかもしれませんが、$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{e}_2$ ととると、次が成り立ちます。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \boldsymbol{e}_1 \\ 0 & 1 & \boldsymbol{e}_2 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{e}_3 \end{vmatrix} \\
&= (0 \cdot 0 - 1 \cdot 0)\boldsymbol{e}_1 - (1 \cdot 0 - 0 \cdot 0)\boldsymbol{e}_2 + (1 \cdot 1 - 0 \cdot 0)\boldsymbol{e}_3 \\
&= \boldsymbol{e}_3
\end{aligned}
$$

同様にして、

$$
\begin{aligned}
& & \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 &= \boldsymbol{e}_1, & \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 &= \boldsymbol{e}_2, \\
\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1 &= -\boldsymbol{e}_3, & \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_2 &= -\boldsymbol{e}_1, & \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3 &= -\boldsymbol{e}_2
\end{aligned}
$$

も得られます。

それでは、一般の 3 次元列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ に対して、それらの外積 $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2$ は、どのようなベクトルを表しているでしょうか？

第 1 列と第 2 列を入れ替えると各 $(i,3)$ 余因子は -1 倍になるので、

$$\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_1 = -\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2$$

です。この性質を交代律と言います。従って特に $\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_1$ ととれば

$$\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_1 = -\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_1$$

より

$$2(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_1) = \boldsymbol{0}$$

なので結局

$$\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{0}$$

つまり、自分自身との外積は $\boldsymbol{0}$ になります。

　また、第 1 列または第 2 列を k 倍(スカラー倍)すると各 $(i,3)$ 余因子も k 倍になるので、

$$(k\boldsymbol{a}_1)\times\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}_1\times(k\boldsymbol{a}_2)=k(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2)$$

です。従って特に $\boldsymbol{a}_2=k\boldsymbol{a}_1$ ととれば

$$\boldsymbol{a}_1\times(k\boldsymbol{a}_1)=k(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_1)=k\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$$

つまり、平行なベクトルどうしの外積も $\boldsymbol{0}$ になります。逆に外積が $\boldsymbol{0}$ になるのは、互いに平行なとき(少なくとも一方が $\boldsymbol{0}$ のときを含む) に限ることも、定義から確かめられます。

　直交すると 0 になる内積とは対照的です。

第 1 列または第 2 列を 2 個のベクトルの和で表すと、各 $(i,3)$ 余因子も、それぞれについて計算した余因子の和になるので、

$$(\boldsymbol{a}_1' + \boldsymbol{a}_1'') \times \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_1' \times \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_1'' \times \boldsymbol{a}_2$$
$$\boldsymbol{a}_1 \times (\boldsymbol{a}_2' + \boldsymbol{a}_2'') = \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2' + \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2''$$

つまり分配律が成り立ちます。

上の３つの性質の内、２つがそれぞれ行列の基本変形(2)(1)と関係していることは、お気付きだと思います。

注：行列の基本変形(列変形)

(1) ある列に 0 でない実数(スカラー)をかける。

(2) 二つの列を入れ替える。

(3) ある列に他の列の実数倍(スカラー倍)を足す。

それでは基本変形(3) に対応する性質は何かと言うと、$\boldsymbol{a}_1$ に $\boldsymbol{a}_2$ の k 倍を足すと

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}_1 + k\boldsymbol{a}_2) \times \boldsymbol{a}_2 &= \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 + (k\boldsymbol{a}_2) \times \boldsymbol{a}_2 \\ &= \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{0} \ = \ \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2\end{aligned}$$

$\boldsymbol{a}_2$ に $\boldsymbol{a}_1$ の k 倍を足すと

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_1 \times (\boldsymbol{a}_2 + k\boldsymbol{a}_1) &= \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_1 \times (k\boldsymbol{a}_1) \\ &= \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{0} \ = \ \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2\end{aligned}$$

で、外積は変わらないと言うことになります。

行列式の第 3 列に関する余因子展開より、

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3| = |A| \ &= \ \tilde{a}_{13}a_{13} + \tilde{a}_{23}a_{23} + \tilde{a}_{33}a_{33} \\
&= \langle \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle
\end{aligned}
$$

が成り立ちます。これを $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ の３重積と呼びます。

実は余因子行列のところで出て来たものと同じ等式ですが、

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1 \rangle = |\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_1| \ &= \ 0, \\
\langle \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2 \rangle = |\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_2| \ &= \ 0
\end{aligned}
$$

より、外積 $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2$ は、$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ の両方と直交することがわかります。

また、

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2| &= \langle \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \rangle \\ &= ||\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2||^2 \ \geq \ 0\end{aligned}$$

ですが、実はこの値は、$\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ が 3 次元空間 $\mathbf{R}^3$ の中で作る平行四辺形の面積の 2 乗になっています。

ただし、等号成立のときは、$\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 = \mathbf{0}$ より、$\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ は平行(少なくとも一方が $\mathbf{0}$ のときを含む) なので、平行四辺形はつぶれてしまって面積は 0 と考えます。

わかりやすい例で言うと、

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \\ 0 \end{pmatrix}$$

の外積は、

$$\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 = \begin{vmatrix} a & b & \boldsymbol{e}_1 \\ c & d & \boldsymbol{e}_2 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{e}_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ad - bc \end{pmatrix}$$

ですから、

$$||\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2||^2 = \langle \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \rangle = (ad - bc)^2$$

で、確かにそのようになっています。

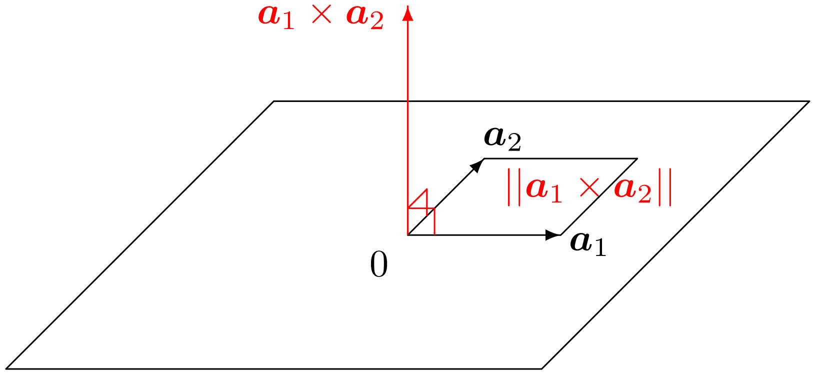
今、$\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の両方と直交するのでしたから、それらが作る平行六面体は、実は $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ が作る平行四辺形を底面とする四角柱で、その高さは $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2$ の長さ $||\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2||$ です。ところがその体積は、その底面積の 2 乗なわけですから、高さ＝底面積と言う等式が成り立ちます。

すなわち、外積 $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の両方と直交し、かつそれらが作る平行四辺形の面積を長さとするベクトルと言うことになります。

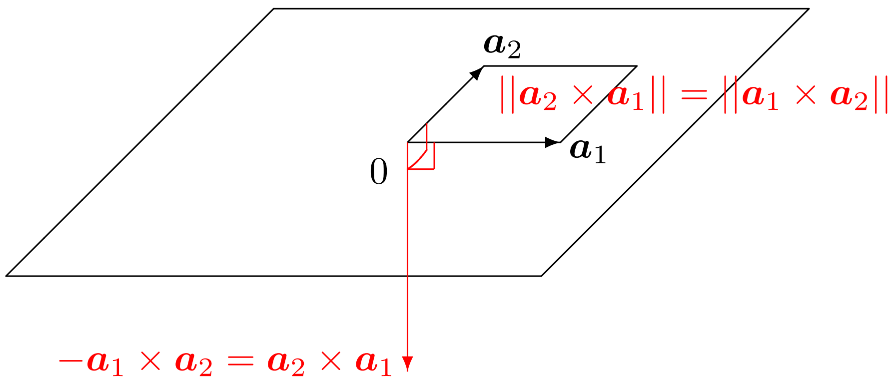
特に、$\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ がちゃんと平行四辺形を作るときには、

$$|\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2| = ||\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2||^2\ >\ 0$$

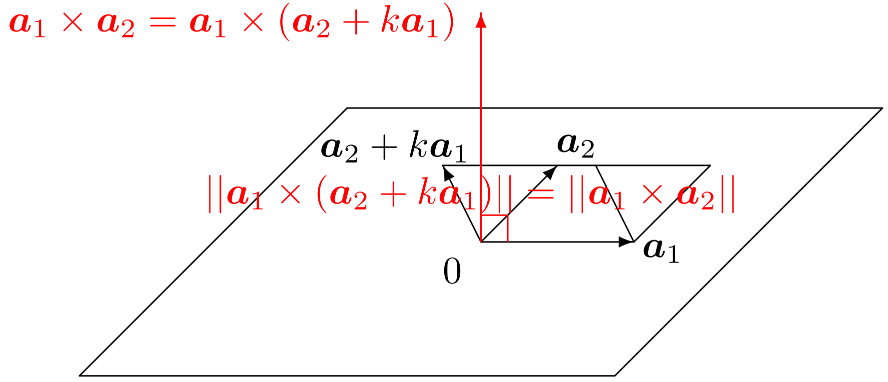
ですから、3 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2$ の配置は右手系です。従って外積は、任意に与えられた平行でない 2 個のベクトルが作る平面に対して、右手系の法ベクトルを与えてくれると言えます。



基本変形(2)で外積が -1 倍になるのは、平面の向きが変わり、右手系の法ベクトルが逆方向を向くため、基本変形(3)で外積が変わらないことも、平行四辺形自体は形が変わっても、その面積や平面が向きも込めて変わらないためと解釈できます。



$\boldsymbol{a}_2$
$||\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_1|| = ||\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2||$
$\boldsymbol{a}_1$
0
$-\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_1$



$\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_1 \times (\boldsymbol{a}_2 + k\boldsymbol{a}_1)$
$\boldsymbol{a}_2 + k\boldsymbol{a}_1$
$\boldsymbol{a}_2$
$||\boldsymbol{a}_1 \times (\boldsymbol{a}_2 + k\boldsymbol{a}_1)|| = ||\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2||$
$\boldsymbol{a}_1$
0

ちなみに、任意の 2 次元列ベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$

に対して、反時計回り(左回り)の法ベクトルも

$$\begin{pmatrix} -a_{21} \\ a_{11} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \boldsymbol{e}_1 \\ a_{21} & \boldsymbol{e}_2 \end{vmatrix}$$

と、4頁の覚え方の式と同じ形で与えられることは、興味深いのではないでしょうか？

さらに一般に n 次元空間 $\mathbf{R}^n$ 内に $n-1$ 個のベクトルが与えられてちゃんと $n-1$ 次元の空間を作っている(一次独立と言い、線形代数IIで扱いました)ときに、残る 1 次元方向の法ベクトルが、同じ形の公式で得られます。

$\|\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2\|$ が $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ の作る平行四辺形の面積になることを、一般の場合に示すには、いろいろな方法がありますが、ここでは、直交行列を用いて説明しておきましょう。

まず外積 $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2$ が、行列 $A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2)$ の余因子行列の転置 ${}^t\widetilde{A}$ の第 3 列であったことを思い出しておきましょう。$\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \neq \boldsymbol{0}$ のとき $|A| \neq 0$ より、$A^{-1} = |A|^{-1}\widetilde{A}$ でしたから、${}^t\widetilde{A} = |A|\ {}^t(A^{-1})$ です。今 $|P| = 1$ である (回転を表す) 3 次の直交行列 P (つまり $P^{-1} = {}^tP$ を満たす行列) に対し、$PA = (P\boldsymbol{a}_1\ P\boldsymbol{a}_2\ P(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2))$ ですが、一方

$$\begin{aligned} {}^t(\widetilde{PA}) &= |PA|\ {}^t((PA)^{-1}) \ = \ |P| \cdot |A|\ {}^t(A^{-1}P^{-1}) \ = \ 1 \cdot |A|\ {}^t(P^{-1}){}^t(A^{-1}) \\ &= |A|P\ {}^t(A^{-1}) \ = \ P(|A|\ {}^t(A^{-1})) \ = \ P\ {}^t\widetilde{A} \end{aligned}$$

が成り立ちます。

今、外積 $(P\boldsymbol{a}_1)\times(P\boldsymbol{a}_2)$ は、行列 $PA=(P\boldsymbol{a}_1\ P\boldsymbol{a}_2\ P(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2))$ の余因子行列の転置 ${}^t(\widetilde{PA})$ の第 3 列ですが、${}^t(\widetilde{PA})=P\,{}^t\widetilde{A}$ であり、また ${}^t\widetilde{A}$ の第 3 列は、$\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2$ ですから、結局、等式

$$(P\boldsymbol{a}_1)\times(P\boldsymbol{a}_2)=P(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2)$$

が示されたことになります(この等式は直接計算でも示せます)。

これから、

$$\begin{aligned}||\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2||^2 &= |\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2|\ =\ |P|\cdot|\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2|\\ &= |P\boldsymbol{a}_1\ P\boldsymbol{a}_2\ P(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2)|\ =\ |P\boldsymbol{a}_1\ P\boldsymbol{a}_2\ (P\boldsymbol{a}_1)\times(P\boldsymbol{a}_2)|\\ &= ||(P\boldsymbol{a}_1)\times(P\boldsymbol{a}_2)||^2\end{aligned}$$

が成り立つので、後は P として、$P\boldsymbol{a}_1$, $P\boldsymbol{a}_2$ の第 3 成分が共に 0 となるような直交行列を適当に選べば、回転では面積は変わらないので、13頁のわかりやすい例に帰着します。

特に $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ が互いに直交する単位ベクトル、つまり

$$||\boldsymbol{a}_1|| = ||\boldsymbol{a}_2|| = 1, \quad \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle = 0$$

を満たす(一辺の長さが 1 の正方形を作るとも言えます) とき、行列

$$(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2), \quad (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \ -\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2)$$

は、いずれも 3 次の直交行列となります(一辺の長さが 1 の立方体を作るとも言えます)。6頁の等式から典型例が得られます。

また逆に、任意の 3 次の直交行列は、上のいずれかの形で表せます。特に前の方が右手系で行列式が 1, $\mathbf{R}^3$ の原点を中心とする回転を表します。一方後の方は左手系で行列式は -1, 向きを変えてしまうので、回転ではありません。

外積は、1年後期に線形代数IIで学んだグラム・シュミットの直交化法と並んで、直交行列を作る有力な手段です。